ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 38 • HEFT 1 • 1940

Zur Theorie ebener Störungen in reibungsfreien Gasen. II

Von Karl Bechert

(Mit 1 Abbildung)

Zusammenfassung

Allgemeine Integration der Differentialgleichungen ebener Störungen in reibungsfreien Gasen und Flüssigkeiten bei polytropen Zustandsänderungen mit beliebigem Index n (außer für $n = 1$). — Ergebnisse, Nachträge zur Arbeit I (§ 1). Allgemeine Integration der Differentialgleichung von Darboux für beliebiges $n\,(\neq 1)$, § 2. Allgemeine Berechnung von x, t als Funktion von ξ, η, d. h. von Dichte und Strömungsgeschwindigkeit (§ 3). Der Fall $n = -1$ (Flüssigkeiten) und die zugehörige Anfangswertaufgabe (§ 4). Stehende Wellen zwischen festen Wänden, allgemeines Rechenschema; Angabe der Lösung für ganzzahliges $m = \frac{3-n}{2(n-1)}$. Beispiel: $m = -1$. Allgemeines über die Lage der Knoten der Strömungsgeschwindigkeit (§ 5).

§ 1. Einleitung, Ergebnisse, Nachträge zur Arbeit I

Arbeit I nennen wir die in den Ann. d. Phys. [5] **37**. S. 89. 1940 erschienene Arbeit des gleichen Titels; die Gleichungen dieser Arbeit werden durch vorgesetztes I bezeichnet, alle sonst zitierten Gleichungen sind solche aus der vorliegenden Arbeit. Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie in I; im folgenden stellen wir wichtige Gleichungen aus I zusammen.

Die Integration der Differentialgleichungen ebener Störungen in reibungsfreien Gasen mit polytroper Zustandsgleichung:

$$p = a^2 \frac{\varrho^n}{n} \tag{1}$$

[vgl. I (2)]:

$$\varrho_t + u\,\varrho_x + \varrho\,u_x = 0\,; \qquad u_t + u\,u_x + \frac{1}{\varrho}\,p_x = 0\,; \tag{2}$$

führt auf die Lösung I (15):

$$\frac{x}{\sqrt{n-1}} - \frac{\eta\,t}{n-1} = V_\eta\,; \qquad -\frac{\xi\,t}{2} = V_\xi\,; \tag{3}$$

dabei ist

$$\xi = \frac{2a\,\varrho^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n-1}}\,; \quad \eta = u\sqrt{n-1}\,; \quad v = \xi + \eta\,; \quad w = \xi - \eta\,. \tag{4}$$

V muß die Differentialgleichung von Darboux erfüllen [I (14)]:

$$V_{\xi\xi} + \frac{k}{\xi} V_\xi = V_{\eta\eta}; \quad k = \frac{3-n}{n-1}; \tag{5}$$

es ist $n \neq 1$ vorausgesetzt.

In I ist vor allem der Fall behandelt worden, daß k eine gerade positive Zahl ist:

$$k = 2m; \quad \text{also} \quad n = \frac{2m+3}{2m+1}; \quad m \text{ ganz}, \geqslant 0. \tag{6}$$

In der vorliegenden Arbeit wird die allgemeine Integration der Darbouxschen Differentialgleichung für beliebiges endliches (reelles) k durchgeführt (§ 2); die Bezeichnung der Gl. (6) behalten wir bei, verstehen aber unter m eine beliebige endliche (reelle) Zahl. Das allgemeine Integral von (5) ist dann:

$$V = \lambda_m [\Phi(v) + \Psi(w)]; \tag{7}$$

Φ, Ψ sind willkürliche Funktionen ihres Arguments; λ_m ist definiert durch:

$$\lambda_m \equiv L^N \Delta_{m_0}; \quad m = N + m_0; \quad N \text{ eine ganze Zahl } \gtrless 0; \tag{8}$$

m_0 liegt zwischen zwei ganzen positiven Zahlen $j, j+1$ so, daß $j \leqslant m_0 < j+1$; man kann $j = 0$ wählen, wenn man will, der Wert von N richtet sich natürlich nach der Wahl von m_0. Ferner:

$$L \equiv \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{9}$$

Δ_m wird für alle nicht negativ-ganzen m gegeben durch:

$$\Delta_m f(y) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^l (m-l)\,\Gamma(m+l)}{2^l \cdot l! \cdot \xi^{m+l} \cdot 2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-y)^{m-l+1}}\, dz. \tag{10}$$

In (10) kann y gleich v oder w gesetzt werden; es ist auf der Riemannschen Fläche des Integranden auf einem geschlossenen Weg um $z = y$ zu integrieren. Für $m = 0$ ist definiert:

$$\Delta_0 f \equiv f. \tag{10a}$$

Für positives N bedeutet:

$$L^N \equiv \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^N; \tag{11a}$$

für negatives N wird

$$L^N f \equiv \int \xi \int \xi \ldots \int \xi \int \xi f\, d\xi\, d\xi \ldots d\xi \tag{11b}$$

ein $|N|$-faches Integral, das unbestimmt auszuführen ist und in dem alle Integrationskonstanten wegzulassen sind. L^{-N} ist der Umkehroperator zu L^N, d. h. es gilt

$$L^{-N} L^N f \equiv f \equiv L^N L^{-N} f. \tag{11c}$$

Λ_m stellt die Verallgemeinerung von L^m auf beliebiges, nicht negativ-ganzes m dar und hat die Eigenschaft

$$L\,\Lambda_m = \Lambda_{m+1}; \quad \Lambda_m = L^{-1}\,\Lambda_{m+1}. \tag{11d}$$

Für nicht negativ-ganze m ist $\lambda_m = \Lambda_m$, man kann dann also statt $L^N \Lambda_{m_0}$ auch Λ_m als Operator vor die eckige Klammer in (7) schreiben. Wenn m negativ-ganzzahlig ist, setze man $m_0 = 0$ und bekommt $\lambda_m = L^m$.

Durch (7) und (8) kann die Lösung der Darbouxschen Gleichung für beliebiges (endliches) m auf die Lösung der Gleichung mit einem m-Wert m_0 zurückgeführt werden, der zwischen 0 und 1 liegt.

Aus V ist x, t nach dem Schema (3) zu berechnen. In § 3 wird bewiesen, daß für beliebiges ganzzahliges (auch negatives) N:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} L^N = L^N \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial}{\partial \xi} L^N = M^N \frac{\partial}{\partial \xi}; \tag{12}$$

dabei ist:

$$M \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}\,\frac{1}{\xi}; \tag{13}$$

für negatives N wird:

$$M^N f \equiv \xi \int \xi \int \xi \ldots \int \xi \int f\, d\xi\, d\xi \ldots d\xi \tag{13a}$$

ein $|N|$-faches Integral, für das die gleichen Vorschriften gelten wie für (11b). M^{-N} ist die Umkehrung zu M^N:

$$M^{-N} M^N f \equiv f \equiv M^N M^{-N} f. \tag{13b}$$

Es läßt sich auch beweisen, daß:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \Lambda_m = \Lambda_m \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \Lambda_m = \mathsf{M}_m \frac{\partial}{\partial \xi}; \tag{14}$$

wo M_m die Verallgemeinerung von M^m auf beliebiges, nicht negativ-ganzes, m darstellt. M_m ist für solches m definiert durch:

$$\mathsf{M}_m f(y) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^l \Gamma(m+l+1)}{2^l \cdot l! \cdot \xi^{m+l} \cdot 2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-y)^{m-l+1}}\, dz; \tag{15}$$

y kann gleich v oder w gesetzt werden; das Integral ist wie in (10) gemeint; $m = 0$ gibt:

$$\mathsf{M}_0 f \equiv f. \tag{15a}$$

Mit diesen Hilfsformeln läßt sich die Berechnung von x, t vereinfachen zu den für beliebiges endliches m gültigen Gleichungen (§ 3):

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{x}{\sqrt{n-1}} - \frac{\eta t}{n-1} = L^N \Lambda_{m_0}[F(v) - G(w)]; \\ &-\frac{\xi t}{2} = M^N \mathsf{M}_{m_0}[F(v) + G(w)]; \qquad m = \frac{3-n}{2(n-1)}; \end{aligned}\right. \tag{16}$$

F, G sind willkürliche Funktionen ihres Arguments, mit den in V vorkommenden Φ, Ψ [vgl. Gl. (7)] hängen sie wie in I zusammen:

$$F(v) = \frac{d\Phi(v)}{dv}; \quad G(w) = \frac{d\Psi(w)}{d(w)}; \tag{17}$$

die Beziehung zwischen m, N, m_0 ist durch (8) gegeben. M_m hat die zu (11d) analoge Eigenschaft:

$$M\,\mathsf{M}_m = \mathsf{M}_{m+1}; \quad \mathsf{M}_m = M^{-1}\mathsf{M}_{m+1}. \tag{13c}$$

Wenn m nicht negativ-ganz ist, wird $M^N \mathsf{M}_{m_0} = \mathsf{M}_m$; für negativ-ganzes m setze man $m_0 = 0$ und bekommt: $M^N \mathsf{M}_{m_0} = M^m$.

Die allgemeinen Gleichungen der Arbeit I und die bisher angeschriebenen von II gelten auch für $n < 1$. Das Auftreten imaginärer Größen, das der Fall $n < 1$ nach sich zieht, kann vermieden werden, wenn man für $n < 1$ an Stelle von ξ, η die Größen einführt:

$$\xi' = \frac{2a\,\varrho^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{1-n}} = -i\,\xi; \quad \eta' = u\sqrt{1-n} = i\,\eta; \tag{18}$$

die dann gültigen Formeln sind in § 3 angegeben.

Physikalisch von Bedeutung ist der Fall $n = -1$; Flüssigkeiten gehorchen nämlich im akustischen Bereich häufig der Zustandsgleichung: $p - p_0 = -\frac{a^2}{\varrho}$, die sich mit $n = -1$ dem Schema (1) einordnet; (zu p kann immer eine additive Konstante genommen werden, weil in (2) nur p_x vorkommt). § 4 bringt die allgemeine Lösung von (2) für $n = -1$, und die Lösung der Anfangswertaufgabe.

Stehende Wellen in solchen Flüssigkeiten zwischen festen Wänden sind in § 5 mathematisch beschrieben. Für beliebiges *ganzzahliges* m kann man die allgemeinste Form stehender Wellen zwischen festen Wänden angeben (§ 5); für nicht-ganzes m kann zwar das allgemeine Rechenschema angeschrieben werden, die Auflösung nach F, G ist mir aber nicht gelungen, weil ich den Umkehroperator zu Δ_{m_0} nicht gefunden habe. Seine vermutliche Form steht in § 5.

Für *jedes* m gilt (§ 5): die Knoten der Strömungsgeschwindigkeit u liegen an den gleichen Stellen, wo die *rein harmonischen* stehenden Wellen ihre Knoten von u haben; die Lage dieser Stellen bekommt man also schon mit der gewöhnlichen Theorie richtig heraus, die sonst nur für hinreichend kleine Amplituden zuständig ist.

Nachträge zur Arbeit I

In I habe ich einige Druckfehler übersehen: S. 99, erste Gleichung muß es heißen: „$\eta_t = \ldots$“, nicht: „$\eta_t + \ldots$“. S. 101, Gl. (39) muß es heißen: „$\Psi(\xi - \eta)$“, nicht: „$\Psi(\xi\,\eta)$“. S. 102, Zeile 8 von

oben muß es heißen: „in Ψ aber umkehrt“, nicht: „in Ψ aber umgekehrt“. S. 113, letzte Gleichung muß es heißen: „$\tilde{x} = \ldots$“, nicht: „$x = \ldots$“. S. 117, zweite Zeile der Gl. (70) fehlt ein Strichpunkt nach der eckigen Klammer; in der ähnlich gebauten Gl. (77), S. 122 steht der Strichpunkt richtig.

Eine Ergänzung zu I ist die Bemerkung, daß die Determinante Δ_1 der Gl. I (19), S. 94, proportional ist zur Determinante Δ der Gl. I (9), S. 93. Es ist nämlich:

$$\Delta_1 = V_{\xi\eta}^2 - \left(V_{\eta\eta} + \frac{t}{n-1}\right)^2,$$

und nach Gl. I (15), S. 94:

$$V_{\xi\eta} = \frac{x_\xi}{\sqrt{n-1}} - \frac{\eta\, t_\xi}{n-1} = -\frac{\xi\, t_\eta}{2};$$

ferner nach den Gleichungen auf derselben Seite:

$$V_{\eta\eta} + \frac{t}{n-1} = \frac{x_\eta}{\sqrt{n-1}} - \frac{\eta\, t_\eta}{n-1} = V_{\xi\xi} + \frac{t}{2} = -\frac{\xi\, t_\xi}{2};$$

daher:

$$\Delta_1 = -\frac{\xi\, t_\eta}{2}\left(\frac{x_\xi}{\sqrt{n-1}} - \frac{\eta\, t_\xi}{n-1}\right) + \frac{\xi\, t_\xi}{2}\left(\frac{x_\eta}{\sqrt{n-1}} - \frac{\eta\, t_\eta}{n-1}\right)$$
$$= \frac{\xi}{2\sqrt{n-1}}\,(x_\eta\, t_\xi - x_\xi\, t_\eta);$$

andererseits gilt nach I (9) und I (13), S. 93:

$$\Delta = (x_\eta\, t_\xi - x_\xi\, t_\eta)\cdot \eta_u\, \xi_\sigma = \frac{2\sqrt{n-1}}{\xi}\,(x_\eta\, t_\xi - x_\xi\, t_\eta);$$

folgt:

$$\Delta_1 = \frac{\xi^2}{4(n-1)}\cdot \Delta, \tag{19}$$

was zu beweisen war.

Da ξ nicht null werden kann (die Dichte kann nicht null und nicht ∞ sein), so ist die Bedingung I (25), S. 97 für das Auftreten von Stoßwellen gleichbedeutend mit $\Delta = 0$; n ist $\neq 1$ vorausgesetzt. $\Delta = 0$ bedeutet aber $x = F(t)$, in Übereinstimmung mit dem Schluß auf S. 98, I.

Entsprechendes gilt für $n = 1$; dort ist $\Delta_1 = -\Delta$, wie man aus den Gleichungen S. 100, I leicht findet. Auch im Fall $u = u(\sigma)$ S. 98, I bedeutet die Stoßwellenbedingung zugleich „x = Funktion von t“, was ja auch ohne Rechnung einleuchtet.

Eine (für die Arbeit I) unwichtige Berichtigung: Die Umkehrung I (8), S. 93 setzt voraus, daß u und σ voneinander unabhängig sind, weil ja u und σ die neuen unabhängigen Variablen sein sollen.

Die Berechnung der Determinante Δ hat also zur Voraussetzung, daß u, σ voneinander unabhängig sind; wenn sie null ist, wird $x = F(t)$. Der Satz, der die Gl. (9), S. 93, I einrahmt, soll demgemäß heißen: „Wir setzen zunächst voraus, daß die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_u & t_u \\ x_\sigma & t_\sigma \end{vmatrix} \tag{9}$$

von Null verschieden sei. Dann gilt:

$$u_x = \ldots“$$

Damit im Zusammenhang ist der Anfang von § 4, S. 98, I zu ändern in: „1. Wenn $u = u(\sigma)$, wenn also u von der Dichte ϱ abhängig ist, kann der Übergang von (6) zu (10) nicht gemacht werden, weil die Umkehrung (8) $u \neq u(\sigma)$ voraussetzt. Die allgemeine Lösung von (6) . . .“. Für die Rechnungen und Folgerungen der Arbeit I macht diese Änderung nichts aus.

Als Erläuterung zu den Gl. I (66), S. 115, die das Anlaufen einer Dichtestörung gegen eine Wand beschreiben (für $n = 3$), hat Herr stud. rer. nat. H. Marx einige Kurven gezeichnet (Abb. 1); sie sind in ihrer zeitlichen Reihenfolge numeriert. Nr. 1 entspricht $t = 0$, Nr. 7 dem Auftreten der Stoßwelle. Die Größe $a\varrho$ ist durch ausgezogene Linien dargestellt, die Strömungsgeschwindigkeit u durch gestrichelte; die u-Kurven sind mit eingeklammerten Zahlen numeriert. Die Nullpunkte für die Ordinatenzählung liegen für $a\varrho$ und u verschieden; die u-Kurven sind absichtlich so verschoben, daß die Linie ungestörten u-Wertes ($t = 0$), d. h. die Abszissenachse, mit der Linie ungestörten $a\varrho$-Wertes A [vgl. Gl. I (66)] zusammenfällt. Dadurch wird deutlich, daß $a\varrho$ und u in der Form übereinstimmen und sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, sobald die Wellen ungestört laufen können. Im rechten Teil unserer Zeichnung fallen dementsprechend die Kurven *3*—*7* mit den zugehörigen gestrichelten Kurven (*3*)—(*7*) zusammen; *7* ist sogar fast von der Wand ($x = 0$) an mit (*7*) identisch. Das gilt nach I, § 3 allgemein in der Weise, daß für beliebiges n die ξ- und η-Kurven sich im Gebiet ungestörter Ausbreitung nur um eine additive Konstante unterscheiden; denn nach S. 96, I ist im Gebiet ungestörter Ausbreitung der v-Welle (darum handelt es sich im rechten Teil der Zeichnung, die Wellen laufen nach rechts!) w praktisch konstant gleich A_1, daher $\xi - \eta = A_1$; im Gebiet der ungestörten w-Ausbreitung würde gelten: $\xi + \eta = \text{const} = A_2$.

Daß die Wellenausbreitung von derjenigen elektromagnetischer Wellen sehr verschieden ist, sieht man deutlich. Natürlich kann man bei diesen nicht-verzerrungsfreien Wellen auch nicht harmonische

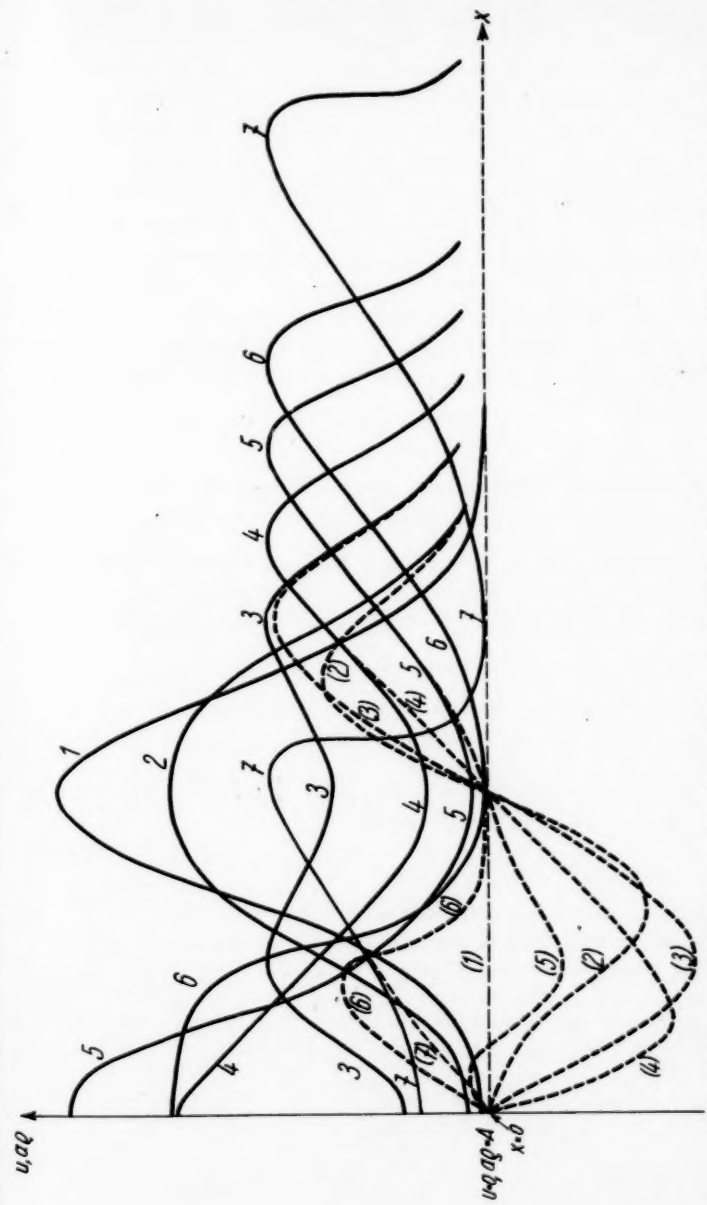


Abb. 1. Die Ausbildung der Stoßwelle bei der Reflexion einer Dichtestörung an einer festen Wand ($x = 0$); $n = 3$. Die ausgezogenen Linien sind proportional der Dichte ($a\,\varrho$), die gestrichelten stellen die Strömungsgeschwindigkeit (w) dar. Die Kurven sind in ihrer zeitlichen Reihenfolge numeriert, 1 entspricht dem Zustand für $t = 0$ (Dichtestörung, keine Strömung); die w-Linien haben eingeklammerte Nummern

Analyse der Wellen treiben in der Weise, daß man die Welle zu irgendeiner Zeit in Teilwellen zerlegt, das Weiterlaufen der Teilwellen untersucht und diese dann zu späterer Zeit wieder zusammensetzt. Die so zusammengesetzte Welle würde von Grund aus anders sein als die wirkliche Welle und auch mit anderer Geschwindigkeit wandern. Denn die Geschwindigkeit des Fortschreitens bestimmter Werte von v, w hängt nach I (23), S. 95, von der Strömungsgeschwindigkeit und der Dichte selbst ab.

§ 2. Integration der Differentialgleichung von Darboux für beliebiges endliches m.

In I ist das allgemeine Integral von (5) angegeben worden, für den Fall, daß $k = 2m$ ist, m ganz und $\geqq 0$. Man kann die Gleichung aber allgemein für beliebiges endliches m integrieren. Wir führen die Abkürzung ein:

$$L \equiv \frac{1}{\xi}\,\frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{20}$$

Für ganzzahliges positives m gilt nach I (39), (42):

$$V = L^m[(\Phi(v) + \Psi(w)]; \tag{21}$$

Φ, Ψ sind willkürliche Funktionen ihres Arguments; wegen v, w vgl. (4).

L^m kann leicht verallgemeinert werden. Denkt man sich zunächst die Operation L^m für ganzes positives m ausgeführt, so sieht man, daß dabei eine Summe aus Gliedern der Form $\xi^{-\alpha}\frac{\partial^\beta}{\partial \xi^\beta}$ entsteht. Differentialquotienten kann man aber bekanntlich auch für nicht-ganze Ordnung der Differentiation (β) definieren; komplexe Integrale treten dann an ihre Stelle.

Zur Durchführung dieses Programms schreiben wir L^m für ganzes positives m wirklich an, es ist:

$$L^m \equiv \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-)^l (m+l-1)!}{(m-l-1)!\,2^l \cdot l!\,\xi^{m+l}}\,\frac{\partial^{m-l}}{\partial \xi^{m-l}}; \quad m > 0, \text{ ganz.} \tag{22}$$

Zur Probe auf die Richtigkeit von (22) ist zu zeigen, 1. daß für $m = 1$ gilt: $L = \frac{1}{\xi}\,\frac{\partial}{\partial \xi}$, und 2. daß L auf L^m angewandt, wirklich L^{m+1} gibt, d. h. die Summe (22), in der m durch $m+1$ ersetzt ist. Daß 1. richtig ist, sieht man sofort. Zu 2:

$$L\,L^m = \frac{1}{\xi}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\,L^m = \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-)^l (m+l-1)!}{(m-l-1)!\cdot 2^l \cdot l!} \left\{ \frac{1}{\xi^{m+l+1}}\,\frac{\partial^{m-l+1}}{\partial \xi^{m-l+1}} \cdot \right.$$

$$\left. - \frac{m+l}{\xi^{m+l+2}}\,\frac{\partial^{m-l}}{\partial \xi^{m-l}} \right\};$$

die zweite Summe kann samt ihrem Vorzeichen umgeschrieben werden in (ersetze $l+1$ durch l):

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{(-)^l (m+l-1)!}{(m-l)!\, 2^{l-1} \cdot (l-1)!\, \xi^{m+l+1}} \frac{\partial^{m-l+1}}{\partial \xi^{m-l+1}};$$

das gibt, wenn wir in der ersten Summe das Glied mit $l=0$ und in der zweiten das Glied mit $l=m$ getrennt hinschreiben und im übrigen die zwei Summen zusammenfassen:

$$L L^m = \frac{1}{\xi^{m+1}} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \xi^{m+1}} + \sum_{l=1}^{m-1} \frac{(-)^l (m+l)!}{(m-l)!\, 2^l \cdot l!\, \xi^{m+l+1}} \frac{\partial^{m-l+1}}{\partial \xi^{m-l+1}}$$

$$+ \frac{(-)^m (2m-1)!}{2^{m-1} \cdot (m-1)!\, \xi^{2m+1}} \frac{\partial}{\partial \xi} = \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-)^l (m+l)!}{(m-l)!\, 2^l \cdot l!\, \xi^{m+1+l}} \frac{\partial^{m+1-l}}{\partial \xi^{m+1-l}}$$

$$+ \frac{(-)^m (2m-1)!}{2^{m-1} \cdot (m-1)!\, \xi^{2m+1}} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Das letzte Glied ist aber gerade das noch fehlende Glied $l=m$ der vor ihm stehenden Summe; denn es gilt:

$$\frac{(2m-1)!}{2^{m-1} \cdot (m-1)!} = \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!},$$

wie man nach Multiplikation von Zähler und Nenner der linken Seite mit $2m$ erkennt. So folgt:

$$L L^m = \sum_{l=0}^{m} \frac{(-)^l (m+l)!}{(m-l)!\, 2^l \cdot l!\, \xi^{m+1+l}} \frac{\partial^{m+1-l}}{\partial \xi^{m+1-l}} \equiv L^{m+1},$$

vgl. (22); damit ist (22) bewiesen.

Für nicht-ganzes m ersetze man die Differentialquotienten in bekannter Weise durch komplexe Integrale:

$$\frac{\partial^a}{\partial \xi^a} f(\xi) \rightarrow \frac{\Gamma(a+1)}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-\xi)^{a+1}} dz; \tag{23}$$

Γ ist die Gammafunktion; der Integrationsweg ist ein geschlossener Weg um $z=\xi$ auf der Riemannschen Fläche des Integranden. An die Stelle der Fakultäten in (22) treten Gammafunktionen, und als obere Grenze ist in der Summe $l=\infty$ zu nehmen. Da man Φ statt nach ξ auch nach v differentiieren kann und Ψ statt nach ξ auch nach w, so erhält man an Stelle von (21):

$$\left\{ V = A_m \left(\Phi(v) + \Psi(w) \right) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^l (m-l)\, \Gamma(m+l)}{2^l \cdot l!\, \xi^{m+l} \cdot 2\pi i} \right.$$

$$\left. \cdot \left\{ \int \frac{\Phi(z)}{(z-v)^{m-l+1}} dz + \int \frac{\Psi(z)}{(z-w)^{m-l+1}} dz \right\}; \right. \tag{24}$$

m ist wie immer definiert durch:

(24a) $$m = \frac{3-n}{2(n-1)}.$$

Das erste Integral in der geschweiften Klammer ist auf geschlossenem Weg um $z = v$, das zweite um $z = w$ herumzuführen. Durch Einsetzen von (24) in (5) kann man leicht nachrechnen, daß (24) Lösung von (5) für beliebiges Φ, Ψ ist; dabei zeigt sich auch, daß es gar nicht darauf ankommt, daß m positiv ist. Nur negativ ganzzahlig darf m nicht sein, sonst verlieren die Γ-Funktionen ihren Sinn. *Wir haben also in (24) die allgemeine Lösung von (5) für alle m, die nicht negativ-ganz sind.*

Auf die negativ-ganzen m kommen wir noch zu sprechen. Für ganzzahliges positives m brechen die Reihen bei $l = m-1$ ab; aus Λ_m wird dann L^m und aus (24) wieder (21). Für $m = 0$ ist zu setzen:

(24b) $$\Lambda_0 = L^0 \equiv 1;$$

vgl. I (39), S. 101.

Die Konvergenz der Reihe ist in jedem Einzelfall zu untersuchen. Allgemein kann gesagt werden, daß sie sicher dann konvergiert, und sogar absolut und gleichmäßig konvergiert, wenn die Integrationswege so gewählt werden können, daß für das erste Integral $|z-v|_{\max} < 2|\xi|$ und für das zweite $|z-w|_{\max} < 2|\xi|$, wenn die Wege also hinreichend nahe an $z = v$ bzw. $z = w$ herangezogen werden dürfen ($|\xi|$ ist aus physikalischen Gründen $\neq 0$), und wenn $\int|\Phi\,dz|$, $\int|\Psi\,dz|$ über den Weg integriert, konvergent sind. Man kann nämlich so schließen: Der Absolutwert der Summe ist kleiner als die Summe der Absolutbeträge der einzelnen Glieder; der Absolutbetrag der Integrale ist kleiner als das Integral über den Absolutbetrag des Integranden. Von einem bestimmten l-Wert an wird $m-l+1$ negativ; dann ist

$$\int\frac{|\Phi(z)\,dz|}{|z-v|^{m-l+1}} \leqq |z-v|_{\max}^{l-m-1}\int|\Phi(z)\,dz|,$$

wenn wir mit $|z-v|_{\max}$ den größten Wert von $|z-v|$ bezeichnen. Für hinreichend großes l heben sich $(l-m)\Gamma(m+l)$ gegen $l!$ weg; die Summe von einem hinreichend großen l an bis $l=\infty$ ist daher kleiner als die entsprechende Summe:

$$\sum\frac{1}{2^l|\xi|^{m+l}\cdot 2\pi}\left\{|z-v|_{\max}^{l-m-1}\int|\Phi(z)\,dz| + |z-w|_{\max}^{-m-1}\int|\Psi(z)\,dz|\right\}.$$

Sind die Integrale konvergent, so konvergiert diese Summe gleichmäßig, wenn auf dem ersten Integrationsweg $\frac{|z-v|_{\max}}{2|\xi|} < 1$ und auf

dem zweiten $\frac{|z-w|_{\max}}{2|\xi|} < 1$. Daher konvergiert dann die ursprüngliche Summe absolut und gleichmäßig.

Λ_m ist die Verallgemeinerung von L^m auf beliebiges, nicht negativ-ganzes m. Es hat ebenfalls die Eigenschaft, die wir für L^m bewiesen haben: es ist

$$L\,\Lambda_m(\Phi+\Psi) = \Lambda_{m+1}(\Phi+\Psi); \tag{25}$$

der Beweis kann genau so geführt werden wie für ganzzahliges m. Daraus folgt zunächst, daß man jedes beliebige Λ_m mit positivem m aus einem Λ_{m_0} erzeugen kann, dessen Index m_0 zwischen 0 und 1 liegt. Man braucht ja nur zu setzen:

$$m = N + m_0; \tag{26}$$

N eine ganze Zahl $\geqslant 0$, und $0 \leqslant m_0 < 1$. Es gilt dann:

$$\Lambda_m = L^N \Lambda_{m_0}. \tag{27}$$

Die Berechnung von V und damit die ganze Aufgabe — denn x, t können aus V leicht gefunden werden, vgl. auch § 3 — ist damit für positive m zurückgeführt auf die Berechnung von V für m-Werte zwischen 0 und 1.

Das Ergebnis (27) läßt sich unmittelbar auf den Fall negativer m verallgemeinern. Wenn wir nämlich einen Operator L^{-1} finden können, der für jedes f die Eigenschaft hat:

$$L^{-1}Lf \equiv f, \tag{28a}$$

dann können wir aus (25) schließen auf:

$$\Lambda_m = L^{-1}\Lambda_{m+1}. \tag{29}$$

Damit aus (29) wieder (25) erhalten werden kann, ist noch zu fordern:

$$LL^{-1}f \equiv f. \tag{28b}$$

Wir setzen:

$$L^{-1}f \equiv \int \xi f\, d\xi; \tag{30}$$

es ist unbestimmt zu integrieren. (28b) ist damit unmittelbar erfüllt; in (28a) gibt die linke Seite $\int \xi \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} f\, d\xi$ nur dann f, wenn wir festsetzen, *daß in (30) die Integrationskonstante wegzulassen ist.*

Mit Hilfe von (29) und (30) kann m beliebig erniedrigt werden; wir können daher allgemein zerlegen:

$$m = N + m_0; \quad N \text{ ganz}, \gtrless 0; \quad 0 \leqslant m_0 < 1. \tag{31}$$

Aus (25) und (29) folgt übrigens, daß m_0 auch so gewählt werden kann, daß es zwischen zwei ganzen positiven Zahlen j und $j+1$

liegt: $j \leqslant m_0 < j+1$; der Wert von N ist gemäß $m = N + m_0$ durch den von m_0 bestimmt.

Als Verallgemeinerung von L^m für beliebiges m haben wir dann:

$$\lambda_m = L^N \Lambda_{m_0}. \tag{32}$$

Darin ist auch der Fall negativ-ganzer m-Werte enthalten; man braucht nur $m_0 = 0$ und $N = m$ zu setzen, vgl. (26); für alle m, die nicht negativ-ganz sind, ist λ_m gleich Λ_m, nach (27) und (29).

Für negatives N ist L^N gemäß (30) definiert durch:

$$L^N f \equiv \int \xi \int \xi \ldots \int \xi \int \xi f \, d\xi \, d\xi \ldots d\xi; \qquad N < 0; \tag{33}$$

das Integral ist $|N|$-fach, alle Integrationen sind unbestimmt auszuführen und die Konstanten wegzulassen.

V berechnet sich aus:

$$V = \lambda_m (\Phi(v) + \Psi(w)); \quad m \text{ beliebig, aber endlich.} \tag{34}$$

Daß (34) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung von Darboux ist für beliebiges endliches m, können wir auch direkt nachrechnen: Es ist wegen (32):

$$V_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} L^N \Lambda_{m_0}(\Phi + \Psi) = \xi L^{N+1} \Lambda_{m_0}(\Phi + \Psi);$$

denn $\frac{\partial}{\partial \xi} = \xi \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} = \xi L$. Ebenso folgt:

$$V_{\xi\xi} = (L^{N+1} + \xi^2 L^{N+2}) \Lambda_{m_0}(\Phi + \Psi);$$

da L nicht auf η wirkt, so gilt:

$$V_{\eta\eta} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} L^N \Lambda_{m_0}(\Phi + \Psi) = L^N \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \Lambda_{m_0}(\Phi + \Psi).$$

Es ist ferner:

$$\xi^2 L - L \xi^2 = \xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 = -2; \tag{35a}$$

und bei ganzzahligem j, wie wir gleich zeigen werden:

$$\xi^2 L^j - L^j \xi^2 = -2j L^{j-1}. \tag{35b}$$

Denn bei *positivem* j können wir so schließen: Nehmen wir (35b) für einen j-Wert als richtig an, so folgt durch linksseitige Multiplikation mit L:

$$L \xi^2 L^j - L^{j+1} \xi^2 = -2j L^j = \xi^2 L^{j+1} + 2L^j - L^{j+1} \xi^2,$$

wegen (35a); das bedeutet aber die Gültigkeit von (35b) für $j+1$. Da Gl. (35b) für $j = 1$ gilt [vgl. (35a)], so gilt sie daher auch für alle positiven ganzzahligen j. Bei *negativem* j haben wir: es gilt

$$\xi^2 L^{-1} - L^{-1} \xi^2 = 2L^{-2}; \tag{35c}$$

denn es ist identisch in f:

$$2L^{-2}f = 2\int\xi\int\xi f\,d\xi\,d\xi = \int\frac{d}{d\xi}\xi^2\int\xi f\,d\xi\,d\xi$$
$$= \xi^2\int\xi f\,d\xi - \int\xi^3 f\,d\xi = \xi^2 L^{-1}f - L^{-1}\xi^2 f.$$

Durch linke Multiplikation von (35b), das wir für ein festes negatives j zunächst als gültig voraussetzen, mit L^{-1} folgt:

$$L^{-1}\,\xi^2 L^j - L^{j-1}\,\xi^2 = -\,2j\,L^{j-2} = \xi^2 L^{j-1} - 2L^{j-2} - L^{j-1}\,\xi^2,$$

wegen (35c); das bedeutet die Gültigkeit von (35b) für $j-1$. Da Gl. (35b) für $j=-1$ richtig ist, vgl. (35c), so gilt sie auch für alle negativen ganzzahligen j. Damit ist (35b) für *alle* ganzzahligen j bewiesen, denn $j=0$ gibt die Trivialität: $\xi^2-\xi^2=0$.

Wir können daher umrechnen (beachte, daß $k=2m=2N+2m_0$):

$$V_{\xi\xi}+\frac{2m}{\xi}V_\xi - V_{\eta\eta} = \Big(L^{N+1}+L^{N+2}\xi^2 - 2(N+2)L^{N+1}$$
$$+\,2(N+m_0)L^{N+1} - L^N\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big)\,\Lambda_{m_0}(\Phi+\Psi)$$
$$= L^N\Big(L^2\xi^2 + (2m_0-3)L - \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big)\,\Lambda_{m_0}(\Phi+\Psi);$$

da nach (35a)

$$L^2\xi^2 = L\xi^2 L + 2L = \frac{1}{\xi}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,\xi\,\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{2}{\xi}\,\frac{\partial}{\partial\xi} = 3L + \frac{\partial^2}{\partial\xi^2},$$

so folgt: Die Funktion (34) erfüllt die Darbouxsche Gleichung, wenn $\Lambda_{m_0}(\Phi+\Psi)$ der Darboux-Gleichung mit m_0 an Stelle von m genügt, wenn also:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{2m_0}{\xi}\,\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\Big)\,\Lambda_{m_0}(\Phi+\Psi) \equiv 0 \tag{36}$$

ist; das letztere ist aber durch Einsetzen der Darstellung (24) von Λ_{m_0} leicht zu beweisen.

Zugleich sieht man, daß die Integration der Darboux-Gleichung für beliebiges m zurückgeführt werden kann auf die Integration der Gleichung für einen m-Wert zwischen 0 und 1; vgl. (32).

§ 3. Berechnung von x, t aus V

Nach (3) kann man aus V allgemein x, t ausrechnen. Es ist demnach:

$$\frac{x}{\sqrt{n-1}} - \frac{\eta\,t}{n-1} = \frac{\partial}{\partial\eta}\,L^N\Lambda_{m_0}[\Phi(v)+\Psi(w)];$$
$$-\frac{\xi\,t}{2} = \frac{\partial}{\partial\xi}\,L^N\Lambda_{m_0}[\Phi(v)+\Psi(w)];$$

die Ausdrücke rechts lassen sich aber noch vereinfachen. Wir machen das in einzelnen Schritten.

1. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \eta} L^N = L^N \frac{\partial}{\partial \eta};$$

das ist schon im vorigen Paragraphen benützt worden.

2. Verstehen wir unter $\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} f$ allgemein den Ausdruck (23) mit dem komplexen Integral, so können wir schreiben [vgl. (22)]:

$$(37)\quad \Lambda_{m_0}[\Phi(v) + \Psi(w)] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^l \Gamma(m_0 + l)}{\Gamma(m_0 - l)\, 2^l\, l!\, \xi^{m_0 + l}} \frac{\partial^{m_0 - l}}{\partial \xi^{m_0 - l}} [\Phi(v) + \Psi(w)].$$

Für die nicht-ganzen Differentialquotienten gilt die Regel von der Vertauschung der Differentiationen auch; es ist nämlich:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \Phi(v) = \frac{(\alpha + 1)\,\Gamma(\alpha + 1)}{2\pi i} \int \frac{\Phi(z)}{(z - v)^{\alpha + 2}} dz = \frac{\partial^{\alpha + 1}}{\partial \xi^{\alpha + 1}} \Phi(v);$$

und das ist wirklich gleich:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi(v) = \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(v) = \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \frac{d\Phi(v)}{dv}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2\pi i} \int \frac{\frac{d\Phi(z)}{dz}}{(z - v)^{\alpha + 1}} dz = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2\pi i} \cdot (\alpha + 1) \int \frac{\Phi(z)}{(z - v)^{\alpha + 2}} dz;$$

denn der Weg sollte auf der Riemannschen Fläche des Integranden geschlossen sein. Mit den Bezeichnungen:

$$(38)\qquad F(v) \equiv \frac{d\Phi(v)}{dv}; \quad G(w) \equiv \frac{d\Psi(w)}{dw}$$

haben wir also:

$$(39)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \Lambda_{m_0}[\Phi(v) + \Psi(w)] &= \Lambda_{m_0} \frac{\partial}{\partial \eta} [\Phi(v) + \Psi(w)] \\ &= \Lambda_{m_0}[F(v) - G(w)]; \end{aligned} \right.$$

symbolisch geschrieben:

$$(39\text{a})\qquad \frac{\partial}{\partial \eta} \Lambda_{m_0} = \Lambda_{m_0} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Nach dem vorigen Beweisgang gilt das übrigens für alle m, für die Λ_m sinnvoll ist, und auch für λ_m:

$$(39\text{b})\qquad \frac{\partial}{\partial \eta} \lambda_m = \lambda_m \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

die erste Gl. (3) nimmt so die Form an:

$$(40)\qquad \frac{x}{\sqrt{n - 1}} - \frac{\eta\, t}{n - 1} = L^N \Lambda_{m_0}[F(v) - G(w)]; \quad m \text{ beliebig};$$

das ist offenbar die Verallgemeinerung der ersten Gleichung von I (75), wo rechts statt $L^N \Lambda_{m_0}$ einfach L^m stand.

3. Wir führen die Abkürzung ein:

$$M \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\xi}, \tag{41a}$$

mit der Umkehrung:

$$M^{-1} f \equiv \xi \int f \, d\xi; \tag{41b}$$

das Integral ist unbestimmt auszuführen, die Konstante wegzulassen; allgemein für ganzzahliges negatives N:

$$M^N f \equiv \xi \int \xi \int \xi \ldots \int \xi \int \xi \int f \, d\xi \, d\xi \ldots d\xi; \quad N < 0; \tag{41c}$$

das Integral ist $|N|$fach, alle Integrationen sind unbestimmt auszuführen und die Konstanten wegzulassen. M^{-1} hat die Eigenschaft:

$$M^{-1} M f \equiv f \equiv M M^{-1} f. \tag{41d}$$

Wenn N positiv ganzzahlig, wird:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} L^N = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \cdots \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} = M^N \frac{\partial}{\partial \xi};$$

das gilt aber auch für negativ ganzzahliges N, denn wegen (33) kommt:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} L^N f = \frac{\partial}{\partial \xi} \int \xi \int \xi \ldots \int \xi \int \xi \int \xi f (d\xi)^{|N|} = \xi \int \xi \int \ldots \int \xi \int \xi f (d\xi)^{|N|-1}$$

$$= M^{N+1} \xi f = M^N M \xi f = M^N \frac{\partial}{\partial \xi} f,$$

identisch in f. Daher besteht für *alle* ganzzahligen N die Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} L^N = M^N \frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{42}$$

4. Wegen (40) wird man vermuten, daß die zweite Gl. (3) sich als Verallgemeinerung der zweiten Gleichung von I (75), also von:

$$-\frac{\xi t}{2} = M^m [F(v) + G(w)] \tag{43}$$

schreiben läßt. Das ist auch der Fall; zunächst haben wir:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Lambda_{m_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^{l+1} \Gamma(m_0 + l + 1)}{\Gamma(m_0 - l) 2^l l! \, \xi^{m_0 + l + 1}} \frac{\partial^{m_0 - l}}{\partial \xi^{m_0 - l}}$$

$$+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^l \Gamma(m_0 + l)}{\Gamma(m_0 - l) 2^l l! \, \xi^{m_0 + l}} \frac{\partial^{m_0 - l + 1}}{\partial \xi^{m_0 - l + 1}};$$

in der ersten Summe ersetze man $l+1$ durch l, schreibe in der zweiten Summe das Glied mit $l=0$ für sich an und ziehe die übrigen Glieder der zweiten Summe mit der ersten zusammen. So kommt schließlich:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Lambda_{m_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^l \Gamma(m_0+l+1)}{\Gamma(m_0-l+1)\, 2^l\, l!\, \xi^{m_0+l}} \frac{\partial^{m_0-l}}{\partial \xi^{m_0-l}} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Der rechts auf $\partial/\partial\xi$ wirkende Operator ist die Verallgemeinerung von M^m. Wir haben nämlich für ganzzahliges positives m:

$$M^m \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\,\frac{1}{\xi}\right)^m = \sum_{l=0}^{m} \frac{(-)^l (m+l)!}{(m-l)!\, 2^l\, l!\, \xi^{m+l}} \frac{\partial^{m-l}}{\partial \xi^{m-l}}. \tag{44}$$

Die Probe auf die Richtigkeit von (44) kann genau so gemacht werden wie die Probe auf (22). Aus (44) gewinnen wir die Verallgemeinerung M_m von M^m für beliebiges, nicht negativ-ganzes m und bekommen:

$$\left\{\begin{aligned} &\mathsf{M}_m[\Phi(v)+\Psi(w)] \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^l \Gamma(m+l+1)}{2^l\, l!\, \xi^{m+l} \cdot 2\pi i} \\ &\quad \cdot \left\{\int \frac{\Phi(z)}{(z-v)^{m-l+1}}\, dz + \int \frac{\Psi(z)}{(z-w)^{m-l+1}}\, dz\right\}; \quad m>0; \end{aligned}\right. \tag{45}$$

für $m=0$ ist zu setzen:

$$\mathsf{M}_0 = M^0 \equiv 1. \tag{45a}$$

Negativ-ganzes m ist schon in (41c) behandelt. M_m hat übrigens die zu (25) analoge Eigenschaft:

$$M\,\mathsf{M}_m = \mathsf{M}_{m+1}, \quad M^N \mathsf{M}_{m_0} = \mathsf{M}_{N+m_0} \equiv \mathsf{M}_m, \tag{45b}$$

mit deren Hilfe alle M_m z. B. auf die M_{m_0} zurückgeführt werden können, deren $m\,(=m_0)$ zwischen 0 und 1 liegt.

Nach den vorigen Überlegungen gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Lambda_{m_0} = \mathsf{M}_{m_0} \frac{\partial}{\partial \xi}, \tag{46}$$

und auch:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} L^N \Lambda_{m_0} = M^N \mathsf{M}_{m_0} \frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{46a}$$

So folgt:

$$-\frac{\xi t}{2} = M^N \mathsf{M}_{m_0}[F(v)+G(w)]; \quad m \text{ beliebig}; \tag{47}$$

der rechts auftretende Operator $M^N \mathsf{M}_{m_0}$ ist die allgemeinste Form von M^m; für nicht negativ-ganzes m ist er identisch mit M_m.

Die Gl. (40) und (47) geben die allgemeine Lösung der Aufgabe (2), (1) für beliebiges endliches m; F, G sind willkürliche Funk-

tionen ihres Arguments. Eine Zusammenstellung der in (40) und (47) vorkommenden Bezeichnungen findet man in § 1.

Die Beschränkung auf endliches m bedeutet Ausschließen von $n = 1$; an die Stelle der Differentialgleichung von Darboux tritt die Telegraphengleichung, wenn $n = 1$, vgl. I, § 4. Wir wollen auf diesen Fall aber nicht eingehen.

Positives m bedeutet gemäß (24a): $1 < n < 3$; negatives m entweder $n < 1$ oder $n > 3$. Nimmt n von 1 nach $-\infty$ hin ab, so wächst m von $-\infty$ bis $-\frac{1}{2}$ an; nimmt n von 3 nach $+\infty$ hin zu, so nimmt m von 0 bis $-\frac{1}{2}$ ab. Im ersten Bereich ($n < 1$) sind ξ, η rein imaginär [vgl. (4)]; an der Gültigkeit unserer Formeln ändert das nichts. Wenn man aber lieber mit reellen Größen rechnet, so führe man in diesem Bereich ein:

$$\xi' = \frac{2a\,\varrho^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{1-n}} = -i\,\xi; \quad \eta' = u\sqrt{1-n} = i\,\eta; \tag{48}$$

und es wird (vgl. I, § 2):

$$\frac{x}{\sqrt{1-n}} - \frac{\eta' t}{1-n} = V_{\eta'}; \quad + \frac{\xi' t}{2} = V_{\xi'}; \tag{49}$$

für $V(\xi', \eta')$ gilt die Darbouxsche Gleichung unverändert; es bleibt auch $m = \frac{3-n}{2(n-1)}$, so daß man die Lösung (34), (32) übernehmen kann. An die Stelle von v, w tritt v', w':

$$v' = \xi' + \eta'; \quad w' = \xi' - \eta'; \tag{50}$$

L und M, Λ und M sind mit ξ' statt mit ξ zu bilden. Aus (49) wird:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1-n}} - \dfrac{\eta' t}{1-n} = L^N \Lambda_{m_0}[F(v') - G(w')]; \\ \dfrac{\xi' t}{2} = M^N \mathsf{M}_{m_0}[F(v') + G(w')]; \end{cases} \tag{51}$$

Λ_{m_0}, M_{m_0} sind durch (10), (15) definiert. An die Stelle von I (20) treten als Differentialgleichungen, denen die Lösung (51) zu genügen hat, und denen sie für beliebiges F, G auch wirklich genügt:

$$\begin{cases} \xi_t' + \dfrac{\eta' \xi_x'}{\sqrt{1-n}} - \dfrac{\sqrt{1-n}}{2}\,\xi' \eta_x' = 0; \\ \eta_t' + \dfrac{\eta' \eta_x'}{\sqrt{1-n}} - \dfrac{\sqrt{1-n}}{2}\,\xi' \xi_x' = 0. \end{cases} \tag{52}$$

Beispiele zu den Formeln dieses Paragraphen werden in § 4 und 5 gegeben.

§ 4. Der Fall $n = -1$

Im akustischen Bereich kann als Zustandsgleichung der Flüssigkeiten angesetzt werden:

$$p - p_0 = -\frac{a^2}{\varrho}; \tag{53}$$

das entspricht Gl. (1) mit $n = -1$; denn die Konstante p_0 kommt in (2) gar nicht zur Wirkung. m wird hier auch gleich -1; schreiben wir nach der Vorschrift (31): $m = N + m_0$, so können wir setzen: $m_0 = 0$, $N = -1$ und bekommen aus (51), (30) und (41b) als allgemeine Lösung von (2):

$$\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\eta' t}{2} = \int \xi' [F(v') - G(w')]\, d\xi'; \quad \frac{t}{2} = \int [F(v') + G(w')]\, d\xi'. \tag{54}$$

Die Anfangswertaufgabe zu (54)

Für $t = 0$ seien ξ', η' als Funktionen von x gegeben; gesucht sind F und G. Wegen (51) ist:

$$2F = L\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\eta' t}{2}\right) + M\frac{\xi' t}{2}; \quad 2G = L\left(-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\eta' t}{2}\right) + M\frac{\xi' t}{2}.$$

Nach der Ausführung der Differentiationen rechne man $x_{\xi'}$, $t_{\xi'}$ auf ξ_x', ξ_t', η_x', η_t' um mit Hilfe von:

$$x_{\xi'} = \frac{\eta_t'}{\Delta_2}; \quad x_{\eta'} = -\frac{\xi_t'}{\Delta_2}; \quad t_{\xi'} = -\frac{\eta_x'}{\Delta_2}; \quad t_{\eta'} = \frac{\xi_x'}{\Delta_2}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \xi_x' & \eta_x' \\ \xi_t' & \eta_t' \end{vmatrix}.$$

Dann ersetze man ξ_t', η_t' gemäß (52) durch ξ_x', η_x'; so kommt:

$$F(v') = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\xi' v_{x'}}; \quad G(w') = -\frac{1}{2\sqrt{2}\,\xi' w_{x'}}.$$

Zur Bestimmung des funktionalen Aussehens von F, G hat man die Beziehungen für $t = 0$ ($\bar{v}'$, $\bar{w}'$ sind die Funktionen v', w' für $t = 0$):

$$F\left(\bar{v}'(x)\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{\xi}'(x)\,\bar{v}_{x'}}; \quad G\left(\bar{w}'(x)\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{\xi}'(x)\,\bar{w}_{x'}};$$

das müssen Identitäten in x sein, daher:

$$\begin{cases} F(\alpha) \equiv -\dfrac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{\xi}'\left(\bar{v}'^{-1}(\alpha)\right)\dfrac{d\alpha}{d\bar{v}'^{-1}(\alpha)}}; \\ G(\alpha) \equiv -\dfrac{1}{2\sqrt{2}\,\bar{\xi}'\left(\bar{w}'^{-1}(\alpha)\right)\dfrac{d\alpha}{d\bar{w}'^{-1}(\alpha)}}. \end{cases} \tag{55}$$

Aus (54) folgt so:

$$2x - \eta' t\sqrt{2} = \int \xi' \left[\frac{d\bar{v}'^{-1}(v')}{\bar{\xi}'\left(\bar{v}'^{-1}(v')\right) dv'} + \frac{d\bar{w}'^{-1}(w')}{\bar{\xi}'\left(\bar{w}'^{-1}(w')\right) dw'} \right] d\xi';$$

$$\sqrt{2}\, t = \int \left[\frac{d\bar{v}'^{-1}(v')}{\bar{\xi}'\left(\bar{v}'^{-1}(v')\right) dv'} - \frac{d\bar{w}'^{-1}(w')}{\bar{\xi}'\left(\bar{w}'^{-1}(w')\right) dw'} \right] d\xi;$$

diese Ausdrücke lassen sich vereinfachen. In der Gleichung für t kann die Integration nach ξ' durch eine nach v' bzw. w' ersetzt werden. [Grundsätzlich wäre dann zu den Integralen noch eine unbestimmte Funktion von η' zu addieren, die aber Null zu setzen ist, wie das nachträgliche Einsetzen von (56) in (52) und die Anfangsbedingung (für $t = 0$) zeigt; vgl. Anm. 1.] So ergibt sich:

$$\sqrt{2}\, t = \int_{\bar{w}'^{-1}(w')}^{\bar{v}'^{-1}(v')} \frac{dx}{\bar{\xi}'(x)}.$$

In der ersten Gleichung ersetze man ξ' durch $v' - \eta'$ (für den ersten Summanden in der Klammer) bzw. durch $w' + \eta'$ (für den zweiten Summanden in der Klammer) und integriere nach v' bzw. w'. [Auch hier ist die noch freie unbestimmte Funktion von η' Null zu setzen[1]]. So kommt:

$$2x - \eta' t\sqrt{2} = \int^{\bar{v}'^{-1}(v')} \frac{\bar{v}'(x)\, dx}{\bar{\xi}'(x)} + \int^{\bar{w}'^{-1}(w')} \frac{\bar{w}'(x)\, dx}{\bar{\xi}'(x)} - \eta' \int_{\bar{w}'^{-1}(w')}^{\bar{v}'^{-1}(v')} \frac{dx}{\bar{\xi}'(x)}.$$

Hier kann man noch einsetzen: $v' = \xi' + \eta'$; $w' = \xi' - \eta'$ und erhält endgültig:

$$(56) \quad \begin{cases} 2x - \eta' t\sqrt{2} = \bar{v}'^{-1}(v') + \bar{w}'^{-1}(w') + \displaystyle\int_{\bar{w}'^{-1}(w')}^{\bar{v}'^{-1}(v')} \frac{\bar{\eta}'(x)}{\bar{\xi}'(x)}\, dx \\ \qquad\qquad - \eta' \displaystyle\int_{\bar{w}'^{-1}(w')}^{\bar{v}'^{-1}(v')} \frac{dx}{\bar{\xi}'(x)}; \quad \sqrt{2}\, t = \displaystyle\int_{\bar{w}'^{-1}(w')}^{\bar{v}'^{-1}(v')} \frac{dx}{\bar{\xi}'(x)}. \end{cases}$$

Die Gl. (56) stimmt mit Riemanns Lösung für $n = -1$ überein; wenn $\bar{v}'(x)$, $\bar{w}'(x)$ beliebig gelassen werden, ist auch (56) das allgemeine Integral von (52); wir haben aber dafür in (54) eine viel durchsichtigere Form.

---

1) Die Differentialgleichungen (52) würden in der zweiten Gl. (56) rechts noch eine additive Konstante A, in der ersten Gl. (56) rechts noch das Hinzufügen der Funktion $-A\eta' + B$ zulassen; B ist auch eine Konstante. Die Anfangsbedingung (für $t = 0$) verlangt aber $A = 0$, $B = 0$.

Mit (54) oder (56) können ebene Bewegungen in Flüssigkeiten beschrieben werden, die der Zustandsgleichung (53) gehorchen.

§ 5. Über stehende Wellen zwischen festen Wänden

1. Stehende Wellen in solchen Flüssigkeiten kann man mit der in I angegebenen Methode behandeln; es ist:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\eta' t}{2} = L^{-1}[F(v') - G(w')]; \quad \frac{\xi' t}{2} = M^{-1}[F(v') + G(w')];$$

Die Randbedingung: $\eta' = 0$ bei $x = \pm\alpha$ verlangt:

$$\pm\frac{\alpha}{\sqrt{2}} = [L^{-1}(F(v') - G(w'))]_{\eta'=0};$$

es ist aber [$f(\eta')$ entspricht der im vorigen Paragraphen genannten unbestimmten Funktion von η']:

$$[L^{-1}F(v')]_{\eta'=0} = \left[\int \xi' F(v')\,d\xi'\right]_{\eta'=0} = \left[\int (v'-\eta')F(v')\,d\xi'\right]_{\eta'=0}$$
$$= \left[\int v' F(v')\,dv'\right]_{\eta'=0} + [f(\eta')]_{\eta'=0} = \int \xi' F(\xi')\,d\xi' + \text{const};$$

entsprechendes gilt für das andere Integral. Wir können daher setzen (C eine Konstante):

$$[L^{-1}(F(v') - G(w'))]_{\eta'=0} = \int \xi'\,(F(\xi') - G(\xi'))\,d\xi' + C$$
$$= L^{-1}(F(\xi') - G(\xi')) + C.$$

Nennt man, ähnlich wie in I, (76):

$$L^{-1}F(\xi') + \frac{C}{2} \equiv \varphi^{-1}(\xi'); \quad L^{-1}G(\xi') - \frac{C}{2} \equiv \psi^{-1}(\xi'); \tag{57}$$

so folgt

$$\pm\frac{\alpha}{\sqrt{2}} = \varphi^{-1}(\xi') - \psi^{-1}(\xi');$$

und daraus kann wie in I geschlossen werden auf:

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \sum_l A_l \exp\left[\frac{i\pi l\sqrt{2}}{\alpha}\tau\right]; \\ \psi(\tau) &= \sum_l A_l(-)^l \exp\left[\frac{i\pi l\sqrt{2}}{\alpha}\tau\right]; \quad A_{-l} = A_l^*. \end{aligned}\right. \tag{58}$$

φ^{-1}, ψ^{-1} sind daher als bekannt anzusehen; wegen (57) gilt identisch in ξ':

$$F(\xi') = L\varphi^{-1}(\xi') = \frac{1}{\xi'}\frac{d}{d\xi'}\varphi^{-1}(\xi'); \quad G(\xi') = L\psi^{-1}(\xi');$$

damit sind auch F, G bekannt[1]), Einsetzen in (54) gibt die allgemeine Darstellung stehender Wellen zwischen festen Wänden für $n = -1$.

2. Ein Beispiel einer stehenden Schwingung in einer reibungsfreien Flüssigkeit mit dem Druckgesetz (53): Wir wählen die Grundschwingung und können daher setzen[2]):

$$\varphi(\tau) = A + B\cos\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{a}\tau\right); \quad \psi(\tau) = A - B\cos\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{a}\tau\right);$$

(ersetzt man $\sqrt{2}$ durch $\sqrt{n-1}$ oder für $n < 1$ durch $\sqrt{1-n}$, so ist das angegebene φ, ψ für jede Grundschwingung zuständig, wie auch die folgende Umkehrung φ^{-1}, ψ^{-1}):

$$\varphi^{-1}(\tau) = \frac{a}{\pi\sqrt{2}}\arccos\left(\frac{\tau - A}{B}\right); \quad \psi^{-1}(\tau) = \frac{a}{\pi\sqrt{2}}\arccos\left(\frac{A-\tau}{B}\right);$$

weiter ergibt sich:

$$F(v') = \frac{1}{v'}\frac{d}{dv'}\varphi^{-1}(v') = -\frac{a}{B\pi\sqrt{2}\,v'\sqrt{1-\left(\frac{v'-A}{B}\right)^2}};$$

$$G(w') = \frac{a}{B\pi\sqrt{2}\,w'\sqrt{1-\left(\frac{A-w'}{B}\right)^2}}.$$

Aus (54) erhält man so als Grundton der stehenden Schwingung zwischen $x = +a$ und $x = -a$[3]):

---

1) Die Konstante C, die von der unbestimmten Funktion von η' geliefert wurde (für $\eta' = 0$), ist dabei herausgefallen. Dies ist ein allgemeines Ergebnis: Die unbestimmten Funktionen $f(\eta')$, die bei negativ-ganzem N bei der Umformung auftreten:

$$L^{-|N|}F(v') = \int v'\int v'\cdots\int v'\,F(v')\,(dv')^{|N|} + \text{Glieder, die von den } f(\eta') \text{ herrühren,}$$

geben zur Berechnung von $F(v')$ keinen Beitrag. Das folgt einfach daraus, daß die Umkehrung der vorigen Formel: $L^{|N|}L^{-|N|}F(v')$ identisch $F(v')$ geben muß, das ist ja die Definition der Umkehrung. Daher gibt $L^{|N|}$, auf die $f(\eta')$-Glieder angewandt, notwendig Null, wenn $\eta' = 0$. Für unsere Rechnung (vgl. auch Nr. 3!) können wir also von diesen Gliedern absehen und setzen:

$$\left(L^{-|N|}F(v')\right)_{\eta'=0} = L^{-|N|}F(\xi').$$

Dasselbe gilt für G und natürlich auch für die Rechnung in ξ, η.

2) In $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ kann unter dem cos zu τ noch eine Phasenkonstante hinzukommen (A, kann komplex sein), die aber physikalisch keine Bedeutung hat.

3) In (59b) ist eine additive Konstante willkürlich, wie es sein muß; denn der Zeitpunkt $t = 0$ kann beliebig gewählt werden. Wir haben die Konstante gleich Null gesetzt.

$$\frac{\pi}{\alpha}\,x = \arccos\left(\frac{v'-A}{B}\right) - \arccos\left(\frac{A-w'}{B}\right); \tag{59a}$$

$$\frac{\pi\, t\sqrt{A^2-B^2}}{\alpha\sqrt{2}} = \arccos\left(\frac{A}{B}+\frac{B^2-A^2}{B\,v'}\right) - \arccos\left(\frac{A}{B}+\frac{B^2-A^2}{B\,w'}\right). \tag{59b}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß an der Wand $(x = \pm\,\alpha)\, v = w$, d. h. $u = 0$ ist — was wir schon wissen — und:

$$A - (A^2-B^2)\,\frac{\varrho}{\alpha\sqrt{2}} = B\cos\left(\frac{\pi\, t\sqrt{A^2-B^2}}{2\alpha\sqrt{2}}\right). \tag{59c}$$

3. Offenbar ist die Methode der Nr. 1 in diesem Paragraphen für beliebiges negativ ganzzahliges m brauchbar; (positiv ganzzahliges m ist schon in I behandelt). Formal kann man sie sogar auf jedes auch nicht-ganze m anwenden; die Ausgangsgleichungen sind dann (40) und (47), und die Randbedingung[1]):

$$\pm\,\frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} = L^N\, \Lambda_{m_0}\,[F(\xi) - G(\xi)];$$

(für $n < 1$ rechnet man besser mit ξ', η'; der Rechnungsgang bleibt aber derselbe). Mit der Abkürzung:

$$L^N\, \Lambda_{m_0} F(\xi) \equiv \varphi^{-1}(\xi); \quad L^N\, \Lambda_{m_0} G(\xi) \equiv \psi^{-1}(\xi) \tag{60}$$

schließt man wie in I auf:

$$\begin{cases} \varphi(\tau) = \sum\limits_l A_l \exp\left[\dfrac{i\,\pi\, l\sqrt{n-1}}{\alpha}\,\tau\right]; \\ \psi(\tau) = \sum\limits_l A_l\,(-)^l \exp\left[\dfrac{i\,\pi\, l\sqrt{n-1}}{\alpha}\,\tau\right]; \quad A_{-l} = A_l^*. \end{cases} \tag{61}$$

Es kommt nur darauf an, mit Hilfe von (60) die Funktionen F, G aus den bekannten Funktionen $\varphi^{-1}(\xi)$, $\psi^{-1}(\xi)$ auszurechnen. Der erste Schritt dazu kann leicht gemacht werden:

$$\Lambda_{m_0} F(\xi) = L^{-N}\varphi^{-1}(\xi); \quad \Lambda_{m_0} G(\xi) = L^{-N}\psi^{-1}(\xi).$$

Bei negativ-ganzem m ist $m_0 = 0$ zu setzen und daher F, G durch die vorigen Formeln bekannt.

---

1) Daß wir hier gleich ξ als Argument einsetzen können, ist für $m_0 = 0$ und $N > 0$ unmittelbar klar [und schon in I (75a) benutzt worden], für $m_0 = 0$ und $N < 0$ ist es in Anm. 1 zu Nr. 1 dieses Paragraphen begründet, und für $m_0 \neq 0$ folgt es aus der Darstellung der unganzen Differentialquotienten.

Wenn es gelingt, den Umkehroperator zu A_{m_0} zu finden, so ist F, G berechenbar und damit die Aufgabe, stehende Wellen zwischen festen Wänden anzugeben, ganz allgemein gelöst.

Für ganzzahliges positives m gilt:

$$(62)\quad L^{-m} f(\xi) \equiv \int \xi \int \xi \ldots \int \xi f (d\xi)^{|m|} = \sum_{l=0}^{m} \frac{\xi^{2l} (-)^{m-l}}{2^l\, l!} I_{m-l}(f(\xi)),$$

wo

$$(62a)\qquad I_\alpha (f(\xi)) \equiv \frac{1}{2^\alpha\, \Gamma(\alpha+1)} \int \xi^{2\alpha} \cdot \frac{df}{d\xi}\, d\xi;$$

es ist unbestimmt zu integrieren und die Konstante wegzulassen. Die Richtigkeit von (62) beweist man am einfachsten so: Es ist

$$L\, L^{-m} f(\xi) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\xi^{2l-2} (-)^{m-l}}{2^{l-1}\, (l-1)!} I_{m-l} + \frac{(-)^m \xi^{2m}}{2^m} \frac{df}{d\xi} \sum_{l=0}^{m} \frac{(-)^l}{l!\, \Gamma(m-l+1)}$$

da aber:

$$(1-z)^m = \sum_{l=0}^{m} \frac{(-)^l z^l\, \Gamma(m+1)}{\Gamma(l+1)\, \Gamma(m-l+1)} \longrightarrow 0 \text{ für } z \longrightarrow 1\,(m>0),$$

so verschwindet die zweite Summe in $L\, L^{-m} f$ und es bleibt:

$$(63)\qquad L\, L^{-m} f = \sum_{l=0}^{m-1} \frac{\xi^{2l} (-)^{m-1-l}}{2^l\, l!} I_{m-1-l}(f) \equiv L^{-(m-1)} f,$$

wegen (62). Folglich gilt für die Summe (62) wirklich:

$$(64)\qquad L^{-m} f = L^{-1} L^{-m+1} f,$$

wir haben nur noch zu zeigen, daß die Summe (62) für $m = 1$ wirklich $L^{-1} f$, d. h. $\int \xi f\, d\xi$ gibt. Das letztere folgt aber aus:

$$\sum_{l=0}^{1} \frac{\xi^{2l} (-)^{1-l}}{2^l\, l!} I_{1-l} = -I_1 + \frac{\xi^2}{2} I_0$$

$$= -\int \frac{\xi^2}{2} \frac{df}{d\xi}\, d\xi + \frac{\xi^2}{2} f \equiv \int \xi f\, d\xi.$$

Ebenso kann für die Summe (62) bewiesen werden, daß

$$(65)\qquad L^{-m} L f = L^{-(m-1)} f.$$

Durch wiederholte Anwendung von (64) und (65) erhält man:

$$L^m L^{-m} f \equiv f \equiv L^{-m} L^m f. \tag{66}$$

Damit ist gezeigt, daß die Summe (62) der Umkehroperator zu L^m ist, also auch $(L^m)^{-1}$ geschrieben werden könnte.

Die Formel (62) läßt sich unmittelbar auf beliebiges, nicht negativ-ganzes m verallgemeinern und gibt:

$$(\Lambda_m)^{-1} f(\xi) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\xi^{2l}(-)^{m-l}}{2^l\, l!}\, I_{m-l}\left(f(\xi)\right); \tag{67}$$

I_α ist in (62a) definiert. Für positiv-ganzes m hat man zu beachten, daß die Γ-Funktion in I_{m-l} von $l = m+1$ an unendlich wird und die Reihe daher mit $l = m$ abbricht, wie es nach (62) sein soll. Vermutlich ist $(\Lambda_m)^{-1}$ der Umkehroperator zu Λ_m — das soll auch die Bezeichnung andeuten —, ich habe aber die Beziehungen

$$\Lambda_m (\Lambda_m)^{-1} f \equiv f \equiv (\Lambda_m)^{-1} \Lambda_m f$$

nicht beweisen können.

4. Für die Stellen, an denen das Gas oder die Flüssigkeit bei stehenden Schwingungen ständig in Ruhe bleibt (Knoten der Strömungsgeschwindigkeit u), muß nach (40) als Identität in ξ bei festem x gelten:

$$\frac{x}{\sqrt{n-1}} = L^N \Lambda_{m_0} [F(\xi) - G(\xi)].$$

Für die reinen Töne ist nach (61), weil dann nur A_0, A_l von Null verschieden sind:

$$\begin{cases} \varphi(\tau) = A + B\cos\left(\dfrac{\pi l\sqrt{n-1}}{a}\,\tau\right); \\ \psi(\tau) = A + (-)^l B\cos\left(\dfrac{\pi l\sqrt{n-1}}{a}\,\tau\right); \end{cases} \tag{68}$$

daher muß gemäß (60)

$$\frac{\pi x l}{a} = \arccos\left(\frac{\xi - A}{B}\right) - \arccos\left(\frac{\xi - A}{(-)^l B}\right)$$

eine Identität in ξ bei festem x werden. *Bei ungeradem* l ist das erfüllt, wenn:

$$x = \frac{2j+1}{l}\,a; \quad j \text{ eine ganze Zahl.} \tag{69a}$$

Die Grundschwingung ($l = 1$) hat also Knoten von u nur bei $x = \pm a$; der zweite Oberton ($l = 3$) außerdem noch bei $x = \pm \frac{a}{3}$; usw. *Bei geradem* l ($\neq 0$) erhält man:

$$x = \frac{2j}{l} a; \quad j \text{ eine ganze Zahl.} \tag{69b}$$

Hier ist also außer an den Wänden immer auch bei $x = 0$ ein Knoten von u; $x = 0$, $\pm a$ sind zugleich die Knotenstellen des ersten Obertons ($l = 2$); der dritte Oberton hat außerdem noch Knoten bei $x = \pm \frac{a}{2}$; usw.

(69a, b) zeigt, daß die Verzerrung der Wellen, die Größe der Wellenamplitude, auf die Lage der Knoten von u keinen Einfluß hat; sie liegen nämlich genau an den Stellen, an denen die unverzerrten rein harmonischen Schwingungen ihre Knoten von u haben.

Gießen, Institut für theoretische Physik, 28. Mai 1940.

(Eingegangen 28. Mai 1940)

Zustandsgleichung der Gemische

Von V. Fischer

(Mit 3 Abbildungen)

Es wurde bereits an anderer Stelle gezeigt, wie die Zustandsgleichung der Gemische mit der Zustandsgleichung von Kamerlingh-Onnes für einfache Stoffe zusammenhängt[1]). Im nachfolgenden wird dies weiter ausgeführt.

Es seien v_1 und v_2 die spezifischen Rauminhalte der Stoffe 1 und 2, m_1 und m_2 ihre Molekulargewichte, dann sind $\bar{v}_1 = m_1 v_1$ und $\bar{v}_2 = m_2 v_2$ die Molvolumina. Ferner seien $b_1, c_1, d_1, \ldots$ und $b_2, c_2, d_2, \ldots$ die Virialkoeffizienten als Funktionen der Temperatur. Damit lauten die Zustandsgleichungen der beiden Stoffe nach Kamerlingh-Onnes

$$p\,\bar{v}_1 = 84800\,T + b_1\,p + c_1\,p^2 + d_1\,p^3 + \cdots \tag{1}$$

$$p\,\bar{v}_2 = 84800\,T + b_2\,p + c_2\,p^2 + d_2\,p^3 + \cdots \tag{2}$$

Sind z_1 und z_2 die Molkonzentrationen eines Zweistoffgemisches aus den Bestandteilen 1 und 2, und setzen wir

$$z_1\,\bar{v}_1 + z_2\,\bar{v}_2 = \bar{v}, \tag{3}$$

$$z_1\,b_1 + z_2\,b_2 = b, \tag{4}$$

$$z_1\,c_1 + z_2\,c_2 = c, \tag{5}$$

$$\cdots\cdots,$$

so folgt aus Gl. (1) und (2), wenn nach Gl. (3) die Mischungsregel gilt, und unter Beachtung, daß $z_1 + z_2 = 1$ ist,

$$p\,\bar{v} = 84800\,T + b\,p + c\,p^2 + d\,p^3 + \cdots \tag{6}$$

Treten Mischungskontraktionen oder -dilatationen auf, so gilt für das Molvolumen $\bar{v}$ des Gemisches[1])

$$\bar{v} - \bar{v} = 84800\,z_1\,z_2\,(z_1\,\nu_1 + z_2\,\nu_2). \tag{7}$$

Dabei bedeuten ν_1 und ν_2 Funktionen von Temperatur und Druck, für die wir analog der Zustandsgleichung von Kamerlingh-Onnes schreiben

$$84800\,\nu_1 = \beta_1 + \gamma_1\,p + \delta_1\,p^2 + \cdots \tag{8}$$

$$84800\,\nu_2 = \beta_2 + \gamma_2\,p + \delta_2\,p^2 + \cdots \tag{9}$$

1) V. Fischer, Ann. d. Phys. [5] **36**. S. 395. 1939.

$\beta, \gamma, \delta, \ldots$ sind wieder Temperaturfunktionen. Aus Gl. (6) bis (9) erhalten wir die Zustandsgleichung des Gemisches

$$p\,\bar{v} = 84800\,T + \mathfrak{b}\,p + \mathfrak{c}\,p^2 + \mathfrak{d}\,p^3 + \cdots \tag{10}$$

mit

$$\mathfrak{b} = b + z_1 z_2 (z_1 \beta_1 + z_2 \beta_2), \tag{11}$$

$$\mathfrak{c} = c + z_1 z_2 (z_1 \gamma_1 + z_2 \gamma_2), \tag{12}$$

$$\mathfrak{d} = d + z_1 z_2 (z_1 \delta_1 + z_2 \delta_2). \tag{13}$$

In Gl. (10) sind daher die verallgemeinerten Virialkoeffizienten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, ... Funktionen von Temperatur und Konzentration.

Zustandsgleichung von Gasgemischen

Für Gasgemische können wir bei nicht zu hohen Drucken und nicht zu tiefen Temperaturen Gl. (10) vereinfachen zu

$$p\,\bar{v} = 84800\,T + \mathfrak{b}\,p \tag{14}$$

und in Gl. (11) $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ setzen, so daß dann

$$\mathfrak{b} = b + z_1 z_2 \beta \tag{15}$$

wird. Mit Gl. (4) ergibt sich aus Gl. (15)

$$\mathfrak{b} = z_1 b_1 + z_1 z_2 \beta + z_2 b_2. \tag{16}$$

Führen wir in Gl. (16)

$$\beta = 2b_{12} - b_1 - b_2 \tag{17}$$

ein[1]), so geht sie über in

$$\mathfrak{b} = z_1^2 b_1 + 2 z_1 z_2 b_{12} + z_2^2 b_2. \tag{18}$$

Dies ist der Ausdruck, den Van der Waals nach Lorentz in seine Zustandsgleichung für binäre Gemische einsetzt[2]).

Für einen Extremwert der Mischungskontraktionen folgt aus Gl. (15)

$$\left[\frac{\partial(\mathfrak{b} - b)}{\partial z_1}\right]_T = \beta (z_2 - z_1) = 0. \tag{19}$$

Daher wird $z_1 = z_2 = 0{,}5$. Die Isothermen der Mischungskontraktionen sind somit symmetrische Kurven. Dies trifft, wie Versuchsergebnisse zeigen, im allgemeinen nicht zu, doch sind für Gasgemische unter den obigen Voraussetzungen die Abweichungen vom symmetrischen Verlauf vernachlässigbar gering.

1) E. Justi u. M. Kohler, Feuerungstechnik **27**. S. 5. 1939.

2) J. D. Van der Waals, Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes, II. Teil, Leipzig 1900, S. 3.

Für ein Dreistoffgemisch mit den Konzentrationen z_1, z_2, z_3 setzen Justi und Kohler in Verallgemeinerung von Gl. (18)

$$\mathfrak{b} = z_1^2 b_1 + z_2^2 b_2 + z_3^2 b_3 + 2 z_1 z_2 b_{12} + 2 z_2 z_3 b_{23} + 2 z_3 z_1 b_{31} . \tag{20}$$

Ebenso läßt sich Gl. (16) verallgemeinern zu

$$\mathfrak{b} = z_1 b_1 + z_2 b_2 + z_3 b_2 + z_1 z_2 \beta_{12} + z_2 z_3 \beta_{23} + z_3 z_1 \beta_{31} . \tag{21}$$

Führen wir in Gl. (21) entsprechend Gl. (17) die Ausdrücke ein:

$$\beta_{12} = 2 b_{12} - b_1 - b_2 , \tag{22}$$

$$\beta_{23} = 2 b_{23} - b_2 - b_3 , \tag{23}$$

$$\beta_{31} = 2 b_{31} - b_3 - b_1 , \tag{24}$$

so wird Gl. (21) wieder identisch mit Gl. (20).

Entsprechende Gleichungen gelten für Gasgemische aus mehr als drei Bestandteilen.

Mit

$$b = z_1 b_1 + z_2 b_2 + z_3 b_3 \tag{25}$$

ergibt sich aus Gl. (21)

$$\mathfrak{b} - b = z_1 z_2 \beta_{12} + z_2 z_3 \beta_{23} + z_3 z_1 \beta_{31} . \tag{26}$$

Wird eine der drei Konzentrationen gleich Null, so geht Gl. (26) in die Gleichung des verbleibenden Zweistoffgemisches über. Die Mischungskontraktionen der drei Zweistoffgemische 1—2, 2—3, 3—1 bilden daher die Grenzbedingungen für die Mischungskontraktionen des Dreistoffgemisches 1—2—3. Diese lassen sich nach Gl. (26) berechnen, wenn die Werte von β für die drei Zweistoffgemische gegeben sind. Für Äthylalkohol–Methylalkohol–Wasser wurden auf gleiche Weise bereits die Isothermen der Mischungswärmen berechnet und in einem rechtwinkligen ebenen Koordinatensystem dargestellt[1]).

Justi und Kohler verwenden für die Darstellung der Werte von $\mathfrak{b}$ für Wasserstoff–Helium–Argon nach Gl. (20) unter Benutzung der Versuchswerte von Gibby, Tanner und Masson[2]) ein Prisma mit einem Dreieck als Grundfläche zur Kennzeichnung der drei Konzentrationen und den Werten von $\mathfrak{b}$ als Ordinaten. Für die Isothermen ergibt sich dann eine gekrümmte Fläche. Die Werte von $\mathfrak{b}$ werden erhalten, indem man senkrechte Schnitte durch diese Fläche ausrechnet und aufzeichnet[3]).

---

1) V. Fischer, Ann. d. Phys. [5] **32**. S. 347. 1938; vgl. auch Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. **14**. S. 252. 1934.

2) C. W. Gibby, C. C. Tanner u. Irvine Masson, Proc. Roy. Soc. London, A. **122**. S. 283. 1929; C. C. Tanner u. I. Masson, Proc. Roy. Soc. London, A. **126**. S. 268. 1930.

3) E. Justi u. M. Kohler, a. a. O.

Wie im nachfolgenden gezeigt wird, ist die vom Verf. entwickelte Darstellung in einem rechtwinkligen ebenen Koordinatensystem einfacher[1]).

Wasserstoff–Helium–Argon-Gemische

Wir wählen die Zeiger 1 für Wasserstoff, 2 für Helium, 3 für Argon. Damit folgt aus den Versuchswerten von Gibby, Tanner und Masson[2]) nach Justi und Kohler[3])

$$b_1 = 6{,}56 \cdot 10^{-4}, \quad b_2 = 5{,}15 \cdot 10^{-4}, \quad b_3 = -\,7{,}3 \cdot 10^{-4}$$

und

$$\beta_{12} = 2{,}32 \cdot 10^{-4}, \quad \beta_{23} = 18{,}56 \cdot 10^{-4}, \quad \beta_{31} = 7{,}82 \cdot 10^{-4},$$

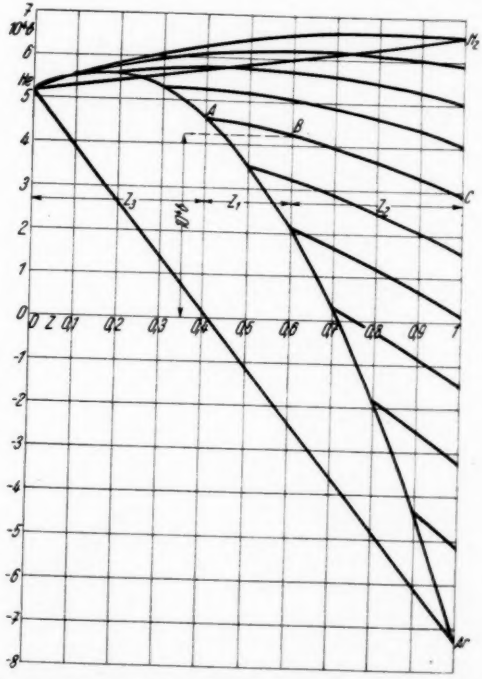


Abb. 1. Isothermen für 25° C der Wasserstoff–Helium–Argon-Gemische im b, z-Diagramm

1) V. Fischer, Ann. d. Phys. [5] **32**. S. 347. 1938; vgl. auch Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. **14**. S. 252. 1934.

2) C. W. Gibby, C. C. Tanner u. I. Masson, a. a. O.; C. C. Tanner u. I. Masson, a. a. O.

3) E. Justi u. M. Kohler, a. a. O.

ausgedrückt in Amagateinheiten. Mit diesen Werten tragen wir in dem $\mathfrak{b}, z$-Diagramm der Abb. 1 die Isothermen für $t = 25^\circ$ C der Zweistoffgemische Ar–He und He–H_2 nach Gl. (16) ein. Diese beiden Isothermen sowie die Strecke ArH_2 begrenzen die Isothermen des Dreistoffgemisches H_2–He–Ar.

Als Beispiel sind in Tab. 1 Werte von $\mathfrak{b}$ für die Isotherme $A\,B\,C$ des Dreistoffgemisches eingetragen, vgl. Abb. 1. Für den Anfangspunkt A gilt $z_3 = 0{,}4$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0{,}6$ und es folgt aus Gl. (16) oder (21) $10^4\,\mathfrak{b} = 4{,}62$. Für B ist $z_3 = 0{,}4$, $z_1 = 0{,}2$, $z_2 = 0{,}4$ und es wird nach Gl. (21) $10^4\,\mathfrak{b} = 0{,}423$. Für C ist $z_3 = 0{,}4$, $z_1 = 0{,}6$, $z_2 = 0$, und es ergibt sich aus Gl. (16) oder (21) $10^4\,\mathfrak{b} = 2{,}89$.

Tabelle 1

z_3	z_1	z_2	$10^4\,\mathfrak{b}$
0,4	0	0,6	4,62
0,4	0,1	0,5	4,45
0,4	0,2	0,4	4,23
0,4	0,3	0,3	3,97
0,4	0,4	0,2	3,655
0,4	0,5	0,1	3,30
0,4	0,6	0	2,89

In gleicher Weise sind in Abb. 1 die Isothermen für $z_3 = 0{,}1$, 0,2, 0,3 usw. bestimmt.

Ebenso wie bei gleichbleibenden Werten von z_3 lassen sich die Isothermen des Dreistoffgemisches auch bei gleichbleibenden Werten von z_1 und z_2 darstellen.

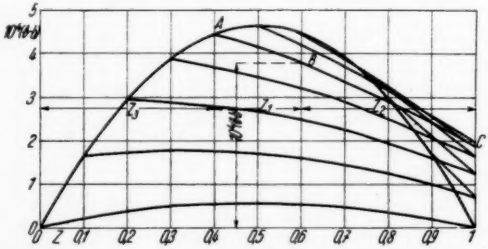


Abb. 2. Isothermen für 25° C der Wasserstoff-Helium-Argon-Gemische im $\mathfrak{b} - b, z$-Diagramm

Sind die Werte von b_1, b_2, b_3 durch die Werte von v_1, v_2, v_3 aus Zustandsgleichungen oder Zustandsdiagrammen gegeben, dann ist die Darstellung der Isothermen des Dreistoffgemisches in einem $\mathfrak{b} - b, z$-Diagramm nach Gl. (26) einfacher. In Abb. 2 ist dies

durchgeführt. Die Berechnung der Isothermen erfolgt nach Gl. (26) ebenso, wie dies für Abb. 1 gezeigt wurde.

Die Mischungsdilatationen der Bestandteile des Gemisches

Bezeichnen wir die molaren Partialvolumina der Bestandteile des Dreistoffgemisches mit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, so ist

$$\bar{v} = z_1 \bar{v}_1 + z_2 \bar{v}_2 + z_3 \bar{v}_3 \tag{27}$$

und

$$p \bar{v}_1 = 84800\, T + \mathfrak{b}_1 p\,. \tag{28}$$

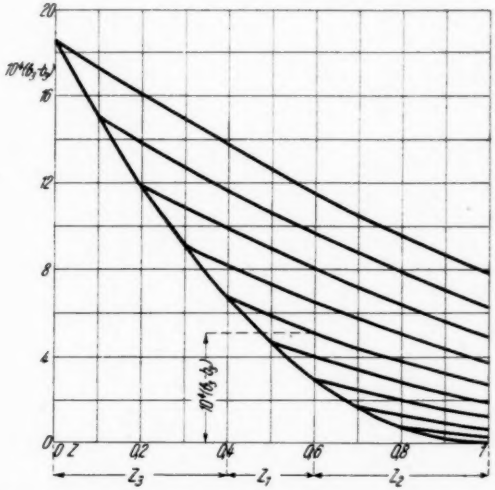


Abb. 3. Isothermen für 25° C der Mischungsdilatationen des Argons im Wasserstoff-Helium-Argon-Gemisch

Entsprechende Gleichungen gelten für $\bar{v}_2$ und $\bar{v}_3$, und es wird

$$\mathfrak{b} - b = z_1 (\mathfrak{b}_1 - b_1) + z_2 (\mathfrak{b}_2 - b_2) + z_3 (\mathfrak{b}_3 - b_3). \tag{29}$$

Zur Berechnung von $\mathfrak{b}_3$ bei gegebenem $\mathfrak{b}$ folgt aus Gl. (29)[1]

$$\mathfrak{b}_3 - b_3 = \mathfrak{b} - b - z_1 \left[\frac{\partial (\mathfrak{b} - b)}{\partial z_1}\right]_{T, z_2} - z_2 \left[\frac{\partial (\mathfrak{b} - b)}{\partial z_2}\right]_{T, z_1}. \tag{30}$$

Mit Gl. (26) erhalten wir aus Gl. (30)

$$\mathfrak{b}_3 - b_3 = z_1^2 \beta_{31} + z_2^2 \beta_{23} + z_1 z_2 (\beta_{31} - \beta_{12} + \beta_{23}). \tag{31}$$

Durch zyklische Vertauschung der Zeiger ergeben sich aus Gl. (31) die Ausdrücke für $\mathfrak{b}_1 - b_1$ und $\mathfrak{b}_2 - b_2$.

1) V. Fischer, Ann. d. Phys. [5] **32**. S. 347. 1938.

Die Werte von $\mathfrak{b}_3 - b_3$ geben die Mischungsdilatationen des Argons im Dreistoffgemisch H_2–He–Ar. Die Darstellung ihrer Isothermen erfolgte nach Gl. (31) in dem ebenen rechtwinkligen Koordinatensystem der Abb. 3 mit den Konzentrationen als Abszissen und den Mischungsdilatationen als Ordinaten auf gleiche Weise, wie dies in Abb. 2 für die Mischungsdilatationen des Dreistoffgemisches nach Gl. (26) geschah.

Entsprechende Diagramme lassen sich für die Isothermen der Mischungsdilatationen $\mathfrak{b}_1 - b_1$ von Wasserstoff und $\mathfrak{b}_2 - b_2$ von Helium entwickeln.

Zusammenfassung

Es wird eine Zustandsgleichung für Gemische aufgestellt, aus der sich die Zustandsgleichung für einfache Stoffe von Kamerlingh-Onnes als Sonderfall ergibt. Vereinfachung der Gleichung für Gasgemische mit nicht zu hohen Drucken und nicht zu tiefen Temperaturen. Anwendung auf Wasserstoff–Helium–Argon-Gemische unter Benutzung der nach den Versuchsergebnissen von Gibby, Tanner und Masson durch Justi und Kohler ermittelten Werte. Berechnung der Mischungsdilatationen der Bestandteile des Gemisches.

Berlin-Johannisthal, Pietschkerstr. 13.

(Eingegangen 26. Mai 1940)

Untersuchungen über die azimutale Intensitätsverteilung der Röntgenbremsstrahlung[1]

Von Richard Honerjäger

(Mit 8 Abbildungen)

I. Einleitung

Experimentelle Untersuchungen über die azimutale Intensitätsverteilung der Röntgenbremsstrahlung führten unter möglichst sauberen Versuchsbedingungen Kulenkampff[2] und später mit verbesserter Anordnung Böhm[3] aus. Sie unterdrückten den die „wahre" Intensitätsverteilung störenden Einfluß der Diffusion und des Geschwindigkeitsverlustes der Elektronen in der Antikathode, indem sie diese durch eine dünne Aluminium- bzw. Magnesiumfolie ersetzten. Ihre Ergebnisse stimmen im wesentlichen mit der von Sommerfeld[4] und Scherzer[5] entwickelten Theorie überein.

Ein genauer Vergleich der von Böhm[3] gemessenen Verteilungskurven für die Grenzwellenlänge mit der theoretischen Kurve nach Scherzer[5] zeigt jedoch, daß zwischen ihnen Abweichungen vorhanden sind, welche die möglichen Meßfehler übersteigen. Böhm nahm an, daß die Kathodenstrahldiffusion in den von ihm verwendeten dünnen Mg-Folien eine merkliche Fälschung der wahren Intensitätsverteilung nicht mehr bewirkte. Wenn das wirklich der Fall war, so durften seine Mg-Folien in das gegen Diffusion besonders empfindliche Azimut 0° Intensität mit der Grenzfrequenz nicht mehr ausstrahlen. Eine experimentelle Prüfung dieses Sachverhaltes gestattete die von Böhm benutzte Röntgenröhre nicht. Mit ihr konnte die azimutale Intensitätsverteilung nur in dem Winkelbereich von 22—150° gemessen werden.

Messungen der Azimutalverteilung mit schwereren Elementen als Antikathode liegen bisher nur ganz vereinzelt vor. Sie erlauben jedoch keine Entscheidung der Frage, ob die Form der

1) D 27.
2) H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. **87**. S. 597. 1928.
3) K. Böhm, Ann. d. Phys. [5]. **33**. S. 315. 1938.
4) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. [5] **11**. S. 257. 1931.
5) O. Scherzer, Ann. d. Phys. [5] **13**. S. 137. 1932.

Verteilungskurven von der Ordnungszahl abhängig ist, da in schwereren Elementen auch die Diffusion der Elektronen größer ist, also entsprechend dünnere Folien verwendet werden müßten.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die bisher gemessenen Kurven der azimutalen Intensitätsverteilung für die Grenzfrequenz bis zu den Azimuten 0° und 180° fortzusetzen. Ferner soll geprüft werden, ob sich die Gestalt der Verteilungskurven ändert, wenn statt der bei früheren Messungen benutzten Al- ($Z = 13$) bzw. Mg-Folien ($Z = 12$) eine hinreichend dünne Schicht aus einem Element mit höherer Ordnungszahl (Nickel, $Z = 28$) verwendet wird.

II. Versuchsanordnung

1. Röntgenröhre

Der Wunsch, die azimutale Intensitätsverteilung möglichst im ganzen Winkelbereich von 0—180° zu messen, machte den Bau einer neuen Röntgenröhre erforderlich, die von der zuletzt von Böhm verwendeten wesentlich abweicht. Um die von der Folie allein in die Azimute 0° und 180° emittierte Röntgenstrahlung messen zu können, mußte der Kathodenstrahl vor und nach Durchdringen der Folie aus seiner geradlinigen Richtung abgelenkt werden. Die Ablenkung bewirkte ein homogenes Magnetfeld, das ein um die ganze Röntgenröhre gelegtes, stromdurchflossenes Spulenpaar in der bekannten Helmholtzschen Anordnung erzeugte. Die Azimute 0° und 180° sind dann durch die Richtung der Tangente des Kathodenstrahles am Orte des Brennflecks gegeben. Der Feldstrom wurde stets so eingestellt, daß der Krümmungsradius der Elektronenbahn bei allen Spannungen der gleiche blieb.

Die Röntgenröhre ist in der Abb. 1 im Horizontalschnitt, in der Abb. 2 im Vertikalschnitt dargestellt. Zwei 11 mm starke Messingplatten schließen den Glaszylinder GZ ab und sind mit ihm mittels Apiezonwachs verkittet. Durch eine weite Bohrung in der oberen Platte ist der zylindrische Röhrenkörper R um seine Achse drehbar eingeführt; ein Ring von Apiezonwachs dichtet das Gehäuseinnere ab. Der Röhrenkörper ist aus einem Stück massiven Rundmessing gedreht, um vakuumtechnisch gefährliche Lötstellen möglichst zu vermeiden. Ein Messingzylinder MZ verlängert den Röhrenkörper bis in den weiten Pumpansatz hinein und verhindert, daß Elektronen von der Glühkathode direkt ins Gehäuseinnere gelangen können. Diese Anordnung ermöglicht es, sowohl Röhre als auch Gehäuse durch einen einzigen Pumpansatz zu evakuieren.

Der Glasschliff S trägt die mit einem Richtzylinder versehene Glühkathode W. Sie ist mit dem negativen Pol der einseitig

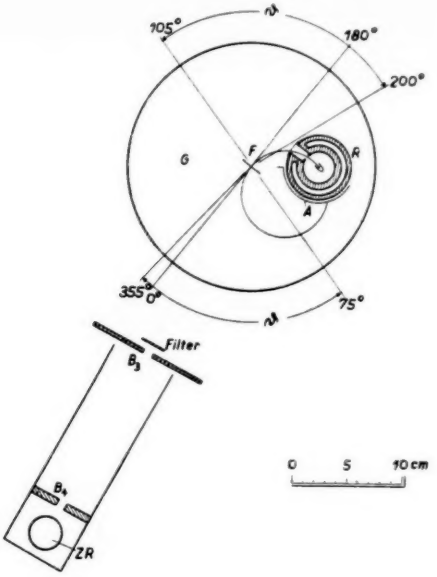


Abb. 1. Röntgenröhre (Horizontalschnitt)

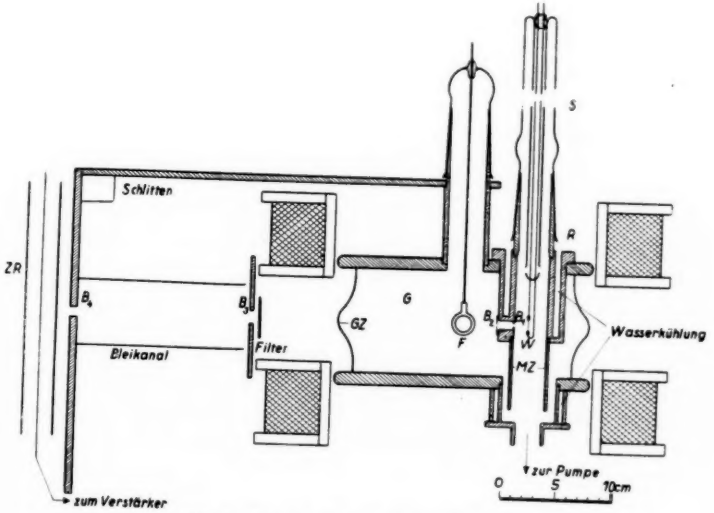


Abb. 2. Röntgenröhre (Vertikalschnitt)

geerdeten Hochspannungsquelle verbunden. Die von der Kathode ausgehenden, gegen den geerdeten, wassergekühlten Röhrenkörper beschleunigten Elektronen treten — immer auf Kreisbahnen — durch die Blenden B_1 (3 mm Durchmesser) und B_2 (1 mm Durchmesser) in das Foliengehäuse G ein, durchsetzen die ebenfalls senkrecht von oben mittels Glasschliff eingeführte Folie F und werden von der Anode A aufgefangen. A besteht aus 0,2 mm dickem Aluminiumblech, welches den Röhrenkörper in der aus der Abb. 1 ersichtlichen Weise eng umschließt, und wird — isoliert von der Gehäusegrundplatte — durch einen in einem Schliffe eingeschmolzenen Draht gehaltert.

Der Glaszylinder GZ ist nach der Mitte zu wulstartig ausgeblasen, einmal aus Festigkeitsgründen, zum anderen, um die von der Röntgenstrahlung durchdrungene Wanddicke möglichst gering zu machen. Der Zylinder wurde von der Firma Schott & Gen.-Jena[1]) aus dem Glase 2954III gefertigt. In dem in Frage kommenden Spektralbereich ist die Absorption einer 1 mm dicken Schicht dieses Glases gleich der einer 0,73 mm dicken Aluminiumschicht. Die Zylinderwandung wurde mit einem Zeiss schen Dickenmesser genau ausgemessen. Sie war, wie zu erwarten, nicht durchweg homogen. Es konnte jedoch ein Bereich von 55° gefunden werden, in welchem die Abweichungen von der mittleren Wanddicke (2,32 mm) unter 0,01 mm lagen. Für die folgenden Messungen im Azimutbereich 355—50° wurde der Glaszylinder so aufgestellt, daß dieser in seiner Dicke annähernd konstante Bereich durchstrahlt wurde. Zur Messung der Verteilungskurven von 355—75° und von 105—200° (Abb. 1. Die Intensitäten sind rotationssymmetrisch um die 0°-Richtung verteilt!) wurden zum Ausgleich entsprechend dicke Aluminiumfolien zusätzlich in den Strahlengang gebracht.

2. Spannungsquelle

Die vom Hochspannungstransformator gelieferte Wechselspannung wurde mit einem Glühventil gleichgerichtet. Ein Kondensator von 0,05 μF glättete die pulsierende Gleichspannung. Seine Größe reichte bei einer durchschnittlichen Stromentnahme von 0,2 mA vollkommen aus, um eine genügend geringe Welligkeit zu gewährleisten. Auf gute Konstanz der Hochspannung mußte besonders geachtet werden, da sich mit ihr bei fester Magnetfeldstärke der Krümmungsradius der Elektronenbahn und damit die Lage des Brennflecks ändert. Die Primärspannung wurde daher einem von

1) Herrn Dr. Harries danke ich für freundliche Beratung bei der Formgebung dieses Glaszylinders.

einer Akkumulatorenbatterie gespeisten Umformer entnommen. Die Hochspannung konnte mit einem statischen Voltmeter nach Starke-Schröder ständig kontrolliert werden.

Der durch die Blenden B_1 und B_2 auf die Folie und Anode treffende Elektronenstrom wurde über ein Galvanometer zur Erde abgeleitet.

Die Röntgenröhre arbeitete störungsfrei bis 34 kV.

3. Messung der Röntgenstrahlung

Die dünnen Folien emittieren außerordentlich geringe Strahlungsintensitäten. Zudem ist aus mechanischen Gründen ihre Belastbarkeit sehr klein. Als Meßinstrumente kamen daher nur Spitzenzähler oder Zählrohr in Betracht. Zur Messung eng ausgeblendeter Strahlenbündel wird gewöhnlich der Spitzenzähler dem Zählrohr vorgezogen, da beim Zählrohr der gesamte zählfähige Bereich nur ungenügend ausgenutzt wird; der verhältnismäßig hohe Resteffekt des Zählrohres beeinträchtigt die Meßgenauigkeit. Aus diesem Grunde verwendete Böhm einen Spitzenzähler zur Intensitätsmessung.

Infolge der langen, sich über Wochen erstreckenden Messungen mußten konstantes und reproduzierbares Arbeiten unbedingt gewährleistet sein. Als Ergebnis längerer Untersuchungen mit Spitzenzählern und Zählrohren ergab sich: Im allgemeinen ist der spannungsunabhängige Bereich bei Spitzenzählern, die mit positiver Spitze arbeiten, wesentlich kleiner als bei Zählrohren normaler Größe. An die Konstanz der Spannungsquelle sind daher erheblich höhere Anforderungen zu stellen als beim Arbeiten mit Zählrohren. Ferner traten in der Arbeitsweise der untersuchten Spitzenzähler trotz sorgfältigster Ausführung häufig sprunghafte Änderungen auf: sie zeigten bei konstanter Bestrahlung mit einem Radiumpräparat ohne ersichtlichen Grund plötzlich wesentlich verschiedene Impulszahlen pro Zeiteinheit an. Bei den untersuchten Zählrohren dagegen war dies nie der Fall; sie arbeiteten vollkommen reproduzierbar. Es schien daher ratsam, die Intensitätsmessungen mit einem Zählrohr vorzunehmen. Der Nachteil des höheren Resteffekts ließ sich durch Zählung größerer Impulszahlen für jeden Meßpunkt ausgleichen.

Bei allen folgenden Messungen wurde ein von Zeiller[1]) entwickeltes und jetzt von der Firma O. Preßler-Leipzig fabrikmäßig hergestelltes Zählrohr verwendet. Es wurde von der zu messenden Röntgenstrahlung senkrecht durchstrahlt (Abb. 2). Die Impulse wurden

1) O. Zeiller, Ztschr. f. Instr.-K. 58. S. 207. 1938.

in der üblichen Weise über einen 3-Röhren-Verstärker einem mechanischen Addierwerk zugeleitet.

Die Charakteristik dieses Zählrohres ist in der Abb. 3 gezeichnet. Der Zählrohrableitwiderstand betrug $10^8\ \Omega$. Alle Messungen wurden bei 1250 Volt ausgeführt. Ein Gleichstromtransformator[1]) erzeugte die Zählrohrspannung.

Wie aus der Abb. 2 hervorgeht, läßt sich das mit 2 mm dickem Bleiblech gepanzerte Zählrohr ZR mit einem Schlitten um die Röntgenröhre herumführen. Die kreisrunde Blende B_4 (8 mm Durchmesser) — und nur sie allein — begrenzt das unter einem bestimmten Azimut austretende Röntgenstrahlbündel. Der Bleikanal und die ebenfalls kreisförmige Blende B_3 (9 mm Durchmesser) hindern seitliche falsche Strahlung und schief aus dem Fenster kommende Streustrahlung am Eintritt ins Zählrohr. B_3 ist in ihrer Ebene mittels Spindel horizontal verschiebbar.

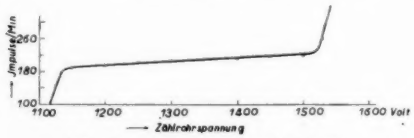


Abb. 3. Zählrohrcharakteristik

4. Herstellung und Dicke der Metallfolien

Als dünne Antikathoden dienten Aluminium- und Nickelfolien. Die bei den folgenden Messungen schwächste Filterung der Röntgenstrahlung (4,5 mm Al) reichte vollkommen aus, die in dem in Frage kommenden Spannungsbereich bereits angeregte, störende Eigenstrahlung des Nickels (NiK_α $\lambda = 1{,}656$ Å) zu unterdrücken. Die Schichten wurden im Hochvakuum auf 0,1 μ dicke Zelluloidfolien aufgedampft. Das Aluminium wurde in Molybdänschiffchen geschmolzen. Zum Bedampfen mit Nickel wurden 0,2 mm dicke Reinnickeldrähte elektrisch geglüht. Eine merkliche Strahlung der Zelluloidfolien war nicht nachweisbar.

Zwecks Bestimmung der Dicke der Metallschichten wurde die Annahme gemacht, daß sie eine ihrer Dicke und pro Atom eine dem Quadrat ihrer Ordnungszahl proportionale Röntgenintensität emittieren. Der Berechnung zugrunde liegt die Dicke der käuflichen 6000 Å-Al-Folie.

Während die aufgedampften Al-Folien noch eine Belastung von $12 \cdot 10^{-6}$ Amp. vertrugen (Brennfleck 7,1 mm²), durfte sie bei den Ni-Folien $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Amp. nicht übersteigen.

1) Der Gleichstromtransformator bestand aus 12 in Reihe geschalteten Kondensatoren, die von einer isoliert aufgestellten Anodenbatterie sukzessive aufgeladen wurden.

III. Messungen

1. Aussonderung der Grenzwellenlänge und benachbarter Spektralbereiche aus dem Kontinuum

Die äußerst geringen Strahlungsintensitäten erlaubten eine Monochromasierung nur durch Filterung. Bei dieser speziellen Anordnung durchsetzte der Röntgenstrahl in allen Fällen die Glaswandung des Foliengehäuses und die des Zählrohres. Die Zählrohrwandung bestand aus 1 mm dickem Jenaer Normalglas G 20. Die aus dessen Zusammensetzung errechnete äquivalente Aluminiumschichtdicke beträgt 2,81 mm, so daß insgesamt ein 4,5 mm Aluminium äquivalentes Filter durchstrahlt wurde. Bei den Hauptmessungen wurde zusätzlich mit 2 mm Aluminium gefiltert. Von einer genauen Berechnung der Gestalt des so ausgefilterten Spektralbereiches wurde abgesehen, da die Abhängigkeit der spektralen Energieverteilung vom Azimut noch nicht genügend bekannt ist.

Um ein vielleicht unterschiedliches Verhalten beim Übergang zu benachbarten, längeren Wellen im Spektrum bei Al- und Ni-Folien zu beobachten, wurden außerdem Verteilungskurven bei einer Filterung mit nur 4,5 und 5,5 mm Aluminium aufgenommen.

2. Ausführung der Messungen

Die hier besprochenen Messungen wurden sämtlich bei einer Spannung von 34 kV durchgeführt. Da der Krümmungsradius der Elektronenbahn durch die geometrische Lage von Glühkathode, Blenden und Folienmitte (Brennfleck) vorgegeben ist, mußte zunächst die zugehörige Magnetfeldstromstärke ermittelt werden. Zu diesem Zweck wurde die Folie durch einen etwa 3 mm breiten Metallblechstreifen als Auffänger ersetzt. Auf diesen trifft nach passender Einregulierung des Feldstromes der Elektronenstrom und ruft im anzeigenden Galvanometer ein scharfes Strommaximum hervor, wodurch eine genaue Bestimmung des für die betreffende Spannung erforderlichen Feldstromes ermöglicht wird.

Wurde an die Stelle der Folie ein Zinksulfidschirm gebracht, so zeichnete sich auf ihm das scharfe, kreisrunde Bild des Brennflecks ab. Auf optischem Wege konnte nun nachgeprüft werden, daß die Blende B_3 im ganzen Winkelbereich nirgends einen Teil des von B_4 begrenzten Strahlenbündels abblendete.

Die Intensitätsmessungen wurden bei willkürlicher Reihenfolge der Winkeleinstellungen vorgenommen, im Bereiche von 50—355° von 5 zu 5°, im Bereiche von 50—200° von 10 zu 10°. Für jedes Azimut wurden die Zeiten für je 900 Impulse abgestoppt. Die Meß-

reihen wurden sodann 3-mal wiederholt, so daß insgesamt für jeden Meßpunkt 3600 Impulse gezählt wurden. Aus den vier Einzelmessungen für eine Winkelstellung wurde jeweils das arithmetische Mittel gebildet. Es enthält außer der zu messenden Röntgenintensität noch den durch radioaktive Umgebungsstrahlung und Höhenstrahlung hervorgerufenen Resteffekt des Zählrohres und einen Anteil etwa vorhandener Streuintensität, welche von den vor und hinter dem Brennfleck liegenden Flächenstücken der Gehäusewand ausgehend in das Zählrohr dringen konnte. Resteffekt und Streuintensität zugleich wurden gesondert gemessen. Man brauchte zu diesem Zweck die Blende B_3 nur so weit nach links und rechts zu verschieben, bis direkte Strahlung von der Folie nicht mehr in das Zählrohr gelangte. Der Mittelwert beider Messungen ergab den gesuchten Beitrag der Streustrahlung und des Resteffektes. Eine merkliche Streuintensität wurde nur zwischen 105 und 150° festgestellt. In diesem Winkelbereich betrug sie höchstens 8% der Röntgenintensität.

Da ein Zählrohr zur Intensitätsmessung verwendet wurde, waren die in der Zeiteinheit registrierten Impulszahlen so hoch (maximal 500 Impulse pro Minute), daß das begrenzte Auflösungsvermögen des mechanischen Zählwerkes berücksichtigt werden mußte. Die Bestimmung des Auflösungsvermögens geschah nach einer von Volz[1]) beschriebenen Methode. Man nähert dem Zählrohr ein Radiumpräparat und bestimmt das Maximum N_{max} der in der Zeiteinheit gezählten Impulse. Sollen zwei aufeinander folgende Impulse noch getrennt registriert werden, so muß die zwischen ihnen liegende Zeit mindestens gleich der „Trennzeit" τ sein. Nach Volz ist $\tau = \frac{1}{e \cdot N_{max}}$. Das Zählwerk, mit dem die folgenden Messungen ausgeführt wurden, zählte maximal 1290 Impulse in der Minute. Seine Trennzeit betrug demnach 0,0171 sec. Der Zusammenhang zwischen wahrer Impulszahl pro Zeiteinheit N_0 und gemessener Impulszahl N ist gegeben durch die Beziehung $N = N_0 e^{-N_0 \tau}$. Aus der mit $\tau = 0{,}0171$ sec gezeichneten Kurve wurden die zu N gehörigen wahren Werte N_0 entnommen.

IV. Meßergebnisse

1. Messungen an Aluminiumfolien

In der Abb. 4 sind die bei 34 kV an Aluminiumfolien verschiedener Dicke gemessenen Verteilungskurven für die Grenzwellen-

1) H. Volz, Ztschr. f. Phys. **93**. S. 539. 1935.

länge dargestellt. Zum Vergleich ist die nach der Theorie von Scherzer[1]) gemäß der Formel

$$(1) \qquad I_\vartheta = \text{const} \cdot \sin^2\vartheta \left[\frac{2(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-\beta\cos\vartheta)^4} + \frac{(1-\sqrt{1-\beta^2})(1-2\sqrt{1-\beta^2})}{(1-\beta\cos\vartheta)^5} \right]$$

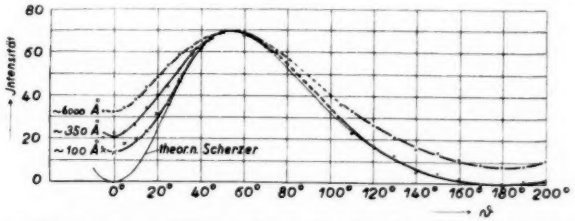


Abb. 4. Azimutale Intensitätsverteilung für die Grenzwellenlänge bei 34 kV an Al-Folien verschiedener Dicke (100, 350 und 6000 Å)

berechnete Kurve eingetragen. Die Intensitäten sind im Maximum einander gleichgesetzt. Mit einer 6000 Å und einer 350 Å dicken Aluminiumfolie wurden die Kurven von 355—200° aufgenommen,

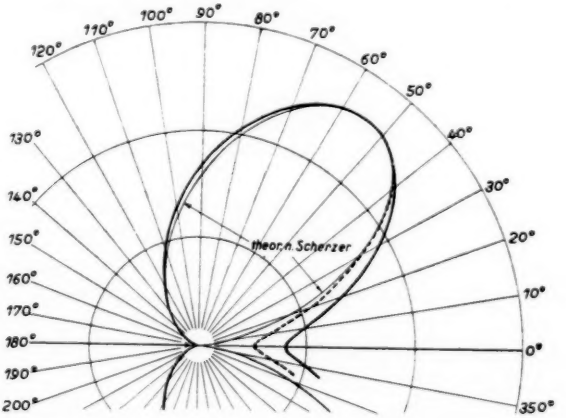


Abb. 5. Azimutale Intensitätsverteilung für die Grenzwellenlänge bei 34 kV an der 350 Å- bzw. 100 Å-Al-Folie in Polarkoordinaten

mit einer 100 Å dicken von 355—50°. Auf Grund der Ergebnisse von Kulenkampff und Böhm lassen sich die ersteren in dem hier nicht gemessenen Winkelbereich von 75—105° zwanglos interpolieren.

Um eine bessere Vorstellung von der räumlichen Verteilung der Emission zu geben, sind in Abb. 5 die Verteilungskurven für die

1) O. Scherzer, a. a. O.

350 Å-Aluminiumfolie (ausgezogene Kurve) und für die 100 Å-Aluminiumfolie (gestrichelte Kurve) in Polarkoordinaten dargestellt und wiederum der theoretischen Kurve gegenübergestellt. Die Kurve der 100 Å-Aluminiumfolie deckt sich oberhalb 30° mit der theoretischen Kurve. Meßpunkte sind der Übersichtlichkeit halber hier nicht eingetragen.

Die Verteilungskurven stimmen in ihrem allgemeinen Verlauf mit den entsprechenden Messungen von Kulenkampff und Böhm überein. Das Intensitätsmaximum liegt bei allen Kurven bei $\vartheta_{max} = 54°$ in Übereinstimmung mit der Theorie. Im sonstigen Verlauf zeigt jedoch die an der 6000 Å-Al-Folie erhaltene Verteilungskurve recht beträchtliche Abweichungen von der theoretischen, die am größten bei $\vartheta = 0°$ sind und zweifellos auf Diffusion der Kathodenstrahlen zurückzuführen sind. Die 350 Å-Al-Folie entspricht etwa der von Böhm benutzten Mg-Folie hinsichtlich ihrer Dicke, da sich beide Verteilungskurven im vergleichbaren Winkelbereich vollkommen zur Deckung bringen lassen. Ihre Übereinstimmung mit der theoretischen Kurve ist bis auf den Winkelbereich unterhalb des Maximums recht gut; die Abweichung übersteigt nur wenig die Fehlergrenzen. Bemerkenswert ist die noch relativ große Intensität bei $\vartheta = 0°$. Daß diese zu einem wesentlichen Teil auf Kathodenstrahldiffusion zurückzuführen ist, zeigt die Tatsache, daß bei Verwendung einer dünneren Al-Folie (100 Å) die gemessene Kurve sich der theoretischen noch besser anschmiegt. Es ist bei dieser anzunehmen, daß sie oberhalb $\vartheta = 50°$, wo Messungen mit der 100 Å-Folie nicht ausgeführt wurden, sich vollkommen mit der theoretischen Kurve deckt.

Man wird damit auf die Frage geführt, ob die an dieser Folie bei kleinen Winkeln gemessene Intensität noch auf restliche Kathodenstrahldiffusion zurückzuführen ist oder ob sie etwa durch ungenügende Monochromasie der Strahlung hervorgerufen sein könnte. Die Messungen erfolgten ja nicht mit monochromatischer, sondern mit gefilterter Strahlung, wobei aus Intensitätsgründen die Filterdicke von 6,5 mm Aluminium nicht überschritten werden konnte. Aus den Messungen von Kulenkampff und Böhm ist aber bekannt, daß mit zunehmender Wellenlänge im Spektrum die Verteilungskurven sich verflachen. Um festzustellen, wie weit die Filterung einen Einfluß hat, wurden Messungen an der 350 Å-Al-Folie gleichfalls bei 34 kV mit verschieden starker Filterung ausgeführt. Die Ergebnisse sind in Abb. 6 aufgetragen. Die Intensitäten sind hier willkürlich bei $\vartheta = 50°$ gleichgesetzt. Es zeigte sich, daß schon bei dieser geringen Variation der Filterdicke eine merkliche Auffüllung des Minimums eintritt. Dabei ist zu beachten, daß die Verbreiterung der

Kurven einen anderen Charakter zeigt als die in Abb. 4 für Folien verschiedener Dicke. Daraus scheint hervorzugehen, daß die bei kleinen Winkeln noch vorhandene Intensität jedenfalls zum Teil durch den Einfluß des vorhandenen langwelligen Anteils der Strahlung hervorgerufen ist. Ob außerdem die Kathodenstrahldiffusion noch von Bedeutung ist, läßt sich nicht eindeutig entscheiden. Es kann aber wohl keinem Zweifel unterliegen, daß bei völliger Ausschaltung der Diffusion und monochromatischer Strahlung auch in diesem Winkelbereich volle Übereinstimmung mit der theoretischen Kurve bestehen würde.

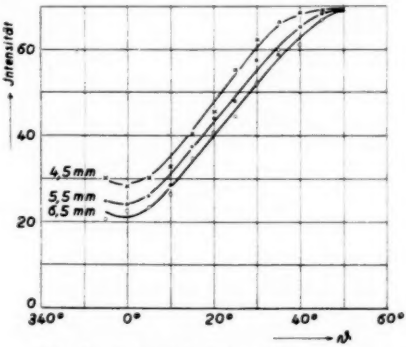


Abb. 6. Azimutale Intensitätsverteilung bei verschieden starker Filterung (4,5, 5,5 und 6,5 mm Al) an der 350 Å-Al-Folie bei 34 kV

2. Messungen an Nickelfolien

Es wurden die azimutalen Verteilungskurven für die Grenzwellenlänge ebenso an einigen Nickelfolien verschiedener Dicke aufgenommen. Dabei zeigte sich, daß man — wie bei Aluminium — ebenfalls durch Wahl hinreichend dünner Schichten eine gute Annäherung an die theoretische Kurve erreichen kann. Allerdings mußten die entsprechenden Nickelfolien dünner sein als die benutzten Aluminiumfolien, wenn ihre Verteilungskurven gleiche Intensitätsunterschiede zeigen sollten. Die Messungen mit der dünnsten der hergestellten Ni-Folien (150 Å) bei 34 kV und Filterung mit 6,5 mm Al sind in der Abb. 7 dargestellt. Die Kurve deckt sich vollkommen mit der an der 350 Å-Al-Folie erhaltenen. Hinsichtlich der Diffusion der Kathodenstrahlen ist anzunehmen, daß die beiden Folien der angegebenen Dicken gleichwertig sind[1]). Die azimutale Intensitätsverteilung für die Grenzwellenlänge scheint nach diesem Ergebnis

1) Nach der Theorie von W. Bothe (Ztschr. f. Phys. 4, S. 300, 1921) für Vielfachstreuung sollte die äquivalente Ni-Dicke noch geringer sein, so daß die Verteilungskurve der 150 Å-Schicht flacher als die der 350 Å-Al-Schicht zu erwarten wäre. Daß dies nicht der Fall ist, ist wohl darauf zurückzuführen, daß eine einfache Rechnung ohne Berücksichtigung der Abschirmung nicht zulässig ist und daß bei diesen geringen Schichtdicken die Voraussetzungen für Vielfachstreuung nicht mehr erfüllt sind. Es wird aber damit besonders deutlich, daß die wahre Verteilungskurve für Ni nicht flacher als die für Al ist.

von der Ordnungszahl des Antikathodenmaterials unabhängig zu sein. Dies kommt auch in Scherzers theoretischer Berechnung zum Ausdruck, nach welcher die Kurvenform durch die oben angegebene Gl. (1) bestimmt ist, welche die Ordnungszahl nicht enthält. Daß bei

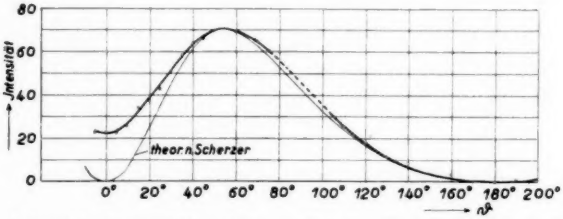


Abb. 7. Azimutale Intensitätsverteilung für die Grenzwellenlänge bei 34 kV an einer 150 Å-Ni-Folie

früheren Messungen[1]) mit schweren Elementen die Intensitätsunterschiede geringer gefunden wurden als bei Elementen mit niedriger Ordnungszahl, dürfte hiernach auf zu große Schichtdicke der verwendeten Folien zurückzuführen sein.

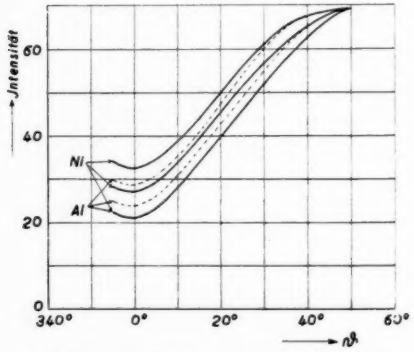


Abb. 8. Vergleich der azimutalen Intensitätsverteilungen an einer 150 Å-Ni-Folie und an einer 350 Å-Al-Folie bei gleichartiger Variation der Filterung (4,5, 5,5 und 6,5 mm Al; 34 kV)

Messungen bei 34 kV und verschiedener Filterdicke wurden unter den gleichen Bedingungen wie beim Aluminium an der Nickelfolie wiederholt (Abb. 8; der Übersichtlichkeit halber sind Meßpunkte nicht eingezeichnet). Die Auffüllung des Minimums bei gleicher Variation der Filterung erfolgt beim Nickel etwas stärker als beim Aluminium. Dies könnte bedeuten, daß die Verbreiterung der Kurven mit zunehmender Wellenlänge im Spektrum beim Nickel rascher erfolgt als beim Aluminium, entsprechend der von Piston[2]) festgestellten stärkeren Abnahme des Polarisationsgrades. Der Unterschied ist jedoch nur klein, so daß sich nicht mit Sicherheit sagen läßt, ob er reell ist.

1) W. W. Nicholas, Bur. of Stand. Journ. of Res. **2**. S. 837. 1929.
2) D. S. Piston, Phys. Rev. **49**. S. 275. 1936.

V. Zusammenfassung

Es wird die azimutale Intensitätsverteilung der kontinuierlichen Röntgenstrahlung dünnster Al- und Ni-Folien bei einer Spannung von 34 kV untersucht, und zwar mit einer besonderen Anordnung, die es gestattet, über frühere Messungen hinaus die Kurven bis zu den Azimuten 0^0 und 180^0 zu verfolgen. Die Folien wurden durch Aufdampfen der Metalle auf Zelluloidhäutchen hergestellt. Infolge ihrer kleinen Schichtdicke und begrenzten Belastbarkeit sind die Strahlungsintensitäten äußerst gering. Die Intensitätsmessungen wurden deshalb mit einem Zählrohr ausgeführt.

Die Untersuchung der Intensitätsverteilung an drei verschiedenen Al-Folien (6000, 350 und 100 Å) für die Strahlung in der Nähe der Grenzwellenlänge (Filterung mit Al) ergibt Kurven, die sich der von Scherzer theoretisch berechneten um so mehr annähern, je dünner die Folien sind; bei der Dicke 100 Å ist die Übereinstimmung sehr gut. Eine Abweichung besteht nur in der Gegend 0^0; durch Variation der Filterung wird es wahrscheinlich gemacht, daß diese hauptsächlich auf ungenügende Monochromasie der gefilterten Strahlung zurückzuführen ist. Es läßt sich jedoch nicht sicher entscheiden, ob die auch bei dieser geringen Schichtdicke noch vorhandene Kathodenstrahldiffusion von Einfluß ist.

Bei der Untersuchung an Nickelfolien ergibt sich für eine Schichtdicke von 150 Å die gleiche Verteilungskurve wie bei der 350 Å-Al-Folie. Da beide hinsichtlich der Kathodenstrahldiffusion als gleichwertig anzunehmen sind, ergibt sich daraus, daß die Verteilungskurve für die Grenzwellenlänge nicht von der Ordnungszahl abhängig ist. Bei schwächerer Filterung erfolgt die Auffüllung des Intensitätsminimums in der Gegend 0^0 bei Ni etwas stärker als bei Al.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. H. Kulenkampff, danke ich herzlichst für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für die mir jederzeit in so reichem Maße gewährte Unterstützung in allen praktischen und theoretischen Fragen, ebenso den Herren Dozenten Dr. Raether und Dr. Wißhak für wertvolle Ratschläge.

Jena, Physikalisches Institut der Universität, Februar 1940.

(Eingegangen am 6. Juni 1940)

Photospannung am Element Metall–Halbleiter–Metall. VII

Die normale Halbleiterphotospannung am Element Metall–Kupferoxydul–Metall[1]

Von W. Rohde

(Mit 9 Abbildungen)

Inhalt: I. *Herstellung der Cu_2O-Platten.* — II. *Meßanordnungen*: 1. Photospannung; 2. Leitfähigkeit; 3. Thermospannung. — III. *Meßergebnisse*: 1. Photospannung in Abhängigkeit von der Lichtintensität; 2. Photospannung in Abhängigkeit von der Temperatur; 3. Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur; 4. Thermokraft in Abhängigkeit von der Temperatur; 5. Gleichrichtereffekt. — IV. *Experimenteller Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit, Thermospannung und Photospannung.* — V. *Ergebnisse zur formelmäßigen Darstellung des Photoeffektes.* — VI. *Zusammenfassung der Ergebnisse.*

Die vorliegende Arbeit bringt in Erweiterung der von Mönch[2] durchgeführten Versuche experimentelle Beiträge über das Verhalten des Kupferoxyduls bei tiefen Temperaturen in bezug auf Photospannung, Thermospannung und Leitfähigkeit. Anschließend wird der Versuch gemacht, die Photo- und die Thermospannung in Beziehung zueinander zu bringen.

I. Herstellung der Kupferoxydulplatten[3]

Elektrolytkupferplatten[4] wurden in einer Größe von etwa $150 \times 30 \times 3$ mm³ an Stahldrähten in einen Silitstabofen gehängt, der bei einer Aufnahmeleistung von 2,1 kW eine Temperatur von etwa 1000° C erzeugte. Die Temperatur wurde nahe an den zu oxydierenden Platten mit einem Platin/Platin–Rhodium-Thermoelement gemessen. Die Heizstromregulierung erlaubte eine Konstanthaltung der Temperatur auf etwa 5°, die nur wenig außerhalb der Toleranzgrenze des Thermoelements lag. Bei 1000° C ist allerdings Kupferoxyd noch gegen Luftsauerstoff beständig, doch ist die

1) D 11 (Auszug).

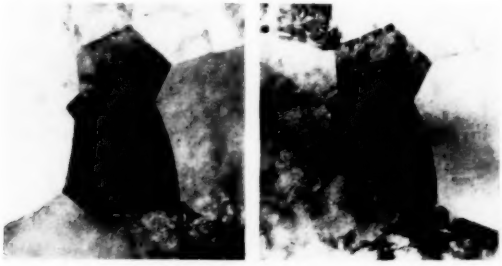
2) G. Mönch, Ann. d. Phys. [5] **36**. S. 1. 1939.

3) Vgl. W. Vogt, Ann. d. Phys. [5] **7**. S. 188. 1930; E. Engelhard, Ann. d. Phys. [5] **17**. S. 509. 1933.

4) Die wir der Liebenswürdigkeit von Herrn Dr. Duhme, Berlin-Siemensstadt, verdanken.

Reaktionsgeschwindigkeit, die zur Bildung des Kupferoxyds führt, klein gegenüber derjenigen für die Bildung von Kupferoxydul. Es ist zu beachten, daß vor dem Schmelzpunkt von Kupfer bei 1083° C noch der einer Mischung von Cu_2O und Cu bei 1065° C liegt.

Nach 150 Std. Erhitzung war das Kupfer vollständig zu Kupferoxydul durchoxydiert, jedoch waren die Kristalle in der Mitte nicht zusammengewachsen. Deshalb wurde für die Messungen jeweils nur die eine Schichthälfte verwandt. Die Platten wurden nach Entfernung aus dem Ofen im Wasserdampf abgekühlt, um so eine stärkere Kupferoxydrückbildung an der Oberfläche zu verhindern.



a) b)

Abb. 1. Teil der Oberfläche eines Cu_2O-Kristalls (Vergr. etwa 20fach)
a) Durchsicht, b) Aufsicht

An der Oberfläche hatte sich daher nur eine höchstens $^1/_{10}$ mm starke Oxydschicht ausgebildet, die durch Schmirgeln entfernt wurde. Die so erhaltenen polykristallinen Proben enthielten Kristalle bis zu 1,5 mm Durchmesser. Sie wiesen noch bei einer Dicke von etwa 1 mm starke Rotdurchlässigkeit auf. Die Abb. 1 zeigt Mikroaufnahmen eines Stückes der Oberfläche einer Probe bei etwa 20facher Vergrößerung.

Die Elektrodenanschlüsse, die noch bei tiefen Temperaturen frei von Übergangswiderständen sein mußten, wurden, wie früher beschrieben[1]), durch Anlöten von Drähten und Bedampfen mit Kupfer hergestellt[2]).

II. Meßanordnungen

1. Photospannung

Die zur Messung der Photospannung benutzte Schaltung geht aus Abb. 2 hervor. Die eine Elektrode der Probe führt über einen

1) G. Mönch, Ann. d. Phys. [5] **36**. S. 2. 1939.
2) Größe der benutzten Proben: etwa 15 × 10 × 0,8 mm³.

Erdungsschlüssel E zu dem einen Quadrantenpaar Q eines Elektrometers (Empfindlichkeit: 1000 Skt./Volt·m), die andere direkt zur Erde. Die Apparatur war die gleiche wie die von Mönch[1]) benutzte.

Zur Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Photospannung wurde der Versuch nicht in flüssiger Luft, sondern in Pentan durchgeführt, das sich durch seinen tiefen Schmelzpunkt (etwa 110° K) und seine hohe Isolationsfähigkeit auszeichnet. Die Temperaturerhöhung erfolgte ohne zusätzliche Heizung allein durch die allmähliche Angleichung an die umgebende Zimmertemperatur. Die Proben wurden durch das Dewargefäß und die Flüssigkeit hindurch belichtet. Als Lichtquelle diente ein Nernststift (200 Volt, 0,25 Amp.), dessen parallel gemachtes, unzerlegtes Licht auf die Breitseite der Probe fiel. Durch eine verstellbare Blende wurde diese so belichtet, daß man für die eine Probenhälfte jeweils die maximale Photospannung erhielt, während die andere Hälfte im Dunkel lag.

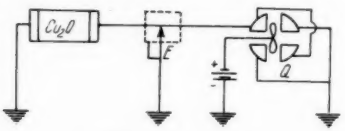


Abb. 2. Schaltung zur Messung der Photospannung

Zwischen den einzelnen Messungen an einer Probe wurde jedesmal die Belichtung unterbrochen, um so die Nullstellung des Instrumentes zu kontrollieren und etwaige störende Einflüsse zu kompensieren.

2. Leitfähigkeit

Die Bestimmung der Dunkel- und Lichtleitfähigkeit des Kupferoxyduls in Abhängigkeit von der Temperatur erfolgte durch Strom- und Spannungsmessungen. Die benutzten Spannungen betrugen 3 bis 40 Volt, die erhaltenen Ströme 10^{-6} bis 10^{-4} Amp. Für die Messung der Lichtleitfähigkeit wurde die Probe in der im vorigen Abschnitt angegebenen Weise mit einem Nernstbrenner belichtet, die Blende jedoch so weit geöffnet, daß das Licht auf die gesamte Probe fiel. Für jeden Temperaturwert wurden nacheinander Dunkelleitfähigkeit und Lichtleitfähigkeit gemessen.

3. Thermospannung

Zur Bestimmung der Thermospannung wurden die Proben mit den Kupferelektroden fest auf zwei Kupferbacken gepreßt, deren eine elektrisch heizbar war. Bei den Versuchen mit tieferen Tem-

1) G. Mönch, Ann. d. Phys. [5] **36**. S. 2. 1939.

peraturen erwies sich jedoch die Benutzung einer zusätzlichen Heizung als überflüssig, da sich die notwendige Temperaturdifferenz bei geeigneter Abkühlung der Apparatur von selbst einstellte.

Die Messung erfolgte in Kompensationsschaltung, wie sie Abb. 3 wiedergibt. Der Halter für die Probe entsprach dem von Schweickert[1]) benutzten und war als Einsatz für ein mit einem Schliff verschließbares Rohr ausgebildet. Der Boden des Rohres war mit P_2O_5 bedeckt. Diese Maßnahme war nötig, da bei tiefen Temperaturen mit störender Wasserhautbildung gerechnet werden mußte. Das Abkühlen der Elektroden erfolgte durch Eintauchen des Glasrohres in ein mit flüssiger Luft gefülltes Dewargefäß. Die Schalter S_1 und S_3, die durch Trolitul isoliert aufgestellt waren, hatten ebenso wie der durch Bernstein isolierte Umschalter S_2 Platinkontakte.

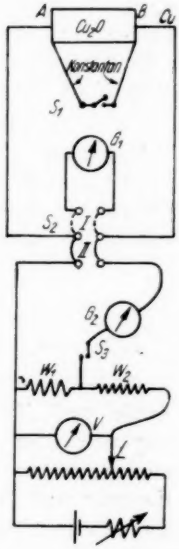


Abb. 3. Schaltung zur Messung der Thermospannung

Zur Vermeidung von Kriechströmen befand sich die ganze Apparatur auf einer Glasplatte. Die Metallunterlage war geerdet. In die Kupferbacken waren in Vertiefungen Konstantan- und Kupferdrähte eingelötet, mit deren Hilfe die Temperaturdifferenz dieser Kupferbacken und die Thermospannung der Probe gemessen wurden. Die Thermospannung $Cu/Cu_2O/Cu$ an den Elektroden A und B wurde durch Kompensation gemessen, wenn die Schalter S_1 offen, S_3 geschlossen waren und sich der Schalter S_2 in der Stellung II (Abb. 3) befand. Hatte der Potentiometerläufer L die Stellung, bei der das Galvanometer G_2 keinen Ausschlag zeigte, so gab das Voltmeter V die gesuchte Thermospannung an. Dabei waren die Widerstände W_1 und W_2 so abgeglichen, daß die Spannung U an den Enden von W_1, also die gesuchte Thermospannung, $^1/_{200}$ der angezeigten Spannung V betrug. Für W_1 wurde ein Widerstand von 25 Ohm genommen, der im Vergleich zu dem der Kupferoxydulproben stets vernachlässigt werden konnte, da deren Widerstände von der Größenordnung 10^4 bei Zimmertemperatur und etwa 10^7 Ohm bei der Temperatur der flüssigen Luft waren. Als Nullinstrument G_2 diente ein Zernickegalvanometer mit einer Empfindlichkeit von $3 \cdot 10^{-10}$ Amp./Skt. m.

1) H. Schweickert, Ann. d. Phys. [5] **34**. S. 252. 1939. Abb. 1.

Bei Temperaturen von tiefer als etwa 150° K konnte die Thermospannung nicht mehr einwandfrei erfaßt werden, da infolge des hohen Eigenwiderstandes des Kupferoxyduls die Empfindlichkeitsgrenze des Galvanometers G_2 erreicht wurde.

Die Temperaturdifferenz der beiden Lötstellen wurde durch Thermoelemente gemessen. (Vgl. Abb. 3. Schalter S_1 geschlossen, S_2 in Stellung I.) Sie betrug durchschnittlich 15° [1]). In den Kurven bezieht sich die Temperaturangabe stets auf die kältere Seite der Probe, ebenso wie bei den Photospannungsmessungen die tatsächliche Versuchstemperatur aufgetragen ist.

Die Temperatur wurde bei den drei Meßreihen, also der Photospannung, Leitfähigkeit und Thermospannung, mit einem Kupfer/Konstantan–Thermoelement gemessen, das sich bei der Thermospannungsmessung in der kälteren Kupferbacke und bei den anderen Messungen in unmittelbarer Nähe der Probe befand.

III. Meßergebnisse

1. Photospannung in Abhängigkeit von der Lichtintensität

Die von Mönch [2]) in seiner Arbeit angeführten Ergebnisse über Größe und Richtung der Photospannung an selbsthergestelltem polykristallinen Cu_2O konnten an verschiedenen Proben bestätigt werden, so auch an solchen, deren Ursprungskupfer unbekannter Herkunft war. Die belichtete Seite des Kristallits erwies sich stets als negativer Pol, die Größe des Photoeffektes betrug bei der benutzten Lichtquelle [3]) bis zu 100 mV [4]). Die Abb. 4 gibt die Ab-

1) Wegen der hohen Temperaturdifferenz muß auf Abschn. III, 4 verwiesen werden.

2) G. Mönch, a. a. O.

3) Als Lichtquelle wurde hier ausnahmsweise eine 10-Watt-Autolampe benutzt, deren Wendel parallel der mit Elektroden versehenen Stirnflächen und senkrecht zu den längsten Seitenkanten der Probe gelegt wurde.

4) Zur Frage, ob dieser Effekt vielleicht als Thermoeffekt zu deuten ist, läßt sich sagen, daß bereits seine Größe hiergegen spricht. Bei einer Thermokraft von etwa 2 mV/Grad kann eine Spannung von 80 mV nur durch die Temperaturdifferenz von 40° entstehen, die aber als unwahrscheinlich groß erscheint. Die Einstellung des Spannungswertes erfolgte auch stets sofort und nicht entsprechend einer allmählichen Temperaturerhöhung. Außerdem spricht folgender Kontrollversuch gegen eine Thermospannung: Berußt man eine Hälfte der Probe, so erhält man bei Belichtung dieser Seite keinerlei Spannung, die aber sofort auftritt, wenn man mit dem Lichtstreifen auf den nicht berußten Teil der Probe kommt.

hängigkeit der Photospannung von der eingestrahlten Lichtintensität[1]) für einige Proben wieder. Die Kurven zeigen alle mehr oder weniger einen Sättigungscharakter; bei der Kurve für Probe 3 scheint diese Sättigung bereits vollständig erreicht zu sein, für Probe 2 dagegen noch nicht.

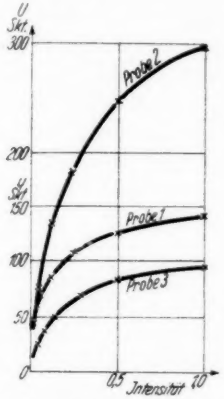


Abb. 4. Photospannung (Cu_2O) in Abhängigkeit von der Lichtintensität. (Bei der Temperatur der flüssigen Luft)

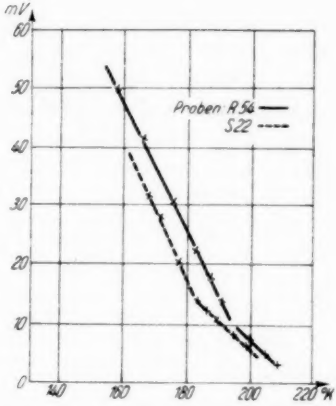


Abb. 5. Photospannung (Cu_2O) in mV in Abhängigkeit von der Temperatur in Grad K

2. Photospannung in Abhängigkeit von der Temperatur

Die Messungen über die Temperaturabhängigkeit der Photospannung wurden im allgemeinen in einem Temperaturbereich von 150—215° K durchgeführt. Die bei 150° K maximal gemessenen Spannungen betrugen bei den benutzten Proben zwischen 40 und 100 mV. Ihr Abfall mit steigender Temperatur ist zuerst ziemlich stark und nahezu linear mit dieser; bei etwa 195° K biegt die Kurve plötzlich ab, und die Spannungsabnahme geht nur noch langsam vor sich (Abb. 5). Bei etwa 220° K verschwindet die Spannung gänzlich. Als Beispiele für die Ergebnisse werden hier wie bei den nachfolgenden Messungen die Beobachtungen an den Proben „R 54“ und „S 22“ angeführt[2]). Diese Temperaturabhängig-

1) Als Lichtintensität „1“ wurde das unmittelbar hinter der Abbildungslinse durch eine variable Lochblende bei deren größter Öffnung hindurchtretende Licht angesetzt. Mit einer Selenphotozelle wurde die Intensitätsverteilung innerhalb des Lichtbündels gemessen und deren Gleichmäßigkeit für eine größere Fläche (größer als die Längsfläche der Probe) festgestellt.

2) Insgesamt wurden 6 Proben untersucht.

keit, also auch die unmeßbare Größe der Spannung $|\Theta|$ bei Zimmertemperatur und herab bis zu etwa 220° K läßt sich rechnerisch durch die gute Leitfähigkeit nach der Formel

$$|\Theta| = \frac{k}{\varepsilon} \cdot T \cdot \ln \frac{\sigma_{\text{bel.}}}{\sigma_{\text{unbel.}}}$$

erklären. Im Vergleich zu den bereits vorhandenen freien Leitungselektronen ist bei Zimmertemperatur und herab bis zu 220° K die Zahl der lichtelektrisch ausgelösten zu klein, um zur Bildung einer selbständigen Spannung auszureichen. Mit fallender Temperatur nimmt aber die Zahl der Leitungselektronen, wie aus den Leitfähigkeitskurven zu sehen ist, stark ab, und somit wird das Verhältnis beider Elektronenarten ausreichend zur Erzeugung einer selbständigen Spannung.

3. Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur

An den gleichen Proben wurden weiterhin Dunkel- und Lichtleitfähigkeit nach der in Abschn. II, 2 angegebenen Anordnung gemessen. Die Abb. 6 zeigt die dazugehörigen Kurven. Aufgetragen

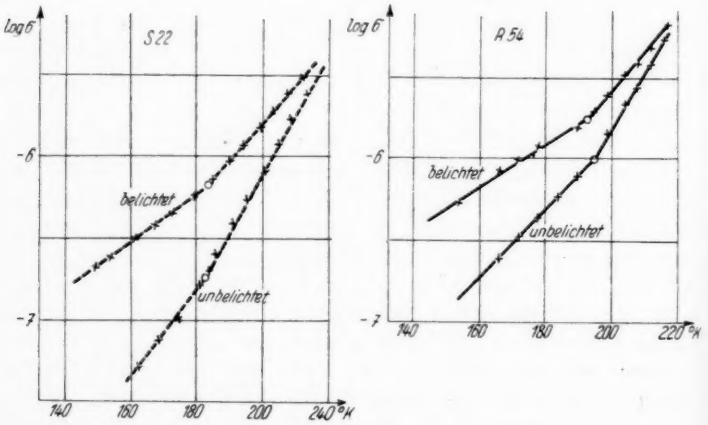


Abb. 6. Leitfähigkeit σ (Cu_2O) in Abhängigkeit von der absoluten Temperatur

ist der Logarithmus der Leitfähigkeit σ als Funktion der absoluten Temperatur. Die Dunkelleitfähigkeit beträgt bei 150° K durchschnittlich 10^{-7} Ohm^{-1} und nimmt mit zunehmender Temperatur stark zu. Die Lichtleitfähigkeit liegt bei der gleichen Temperatur etwa eine Zehnerpotenz höher und ist weniger stark temperaturabhängig als

die Dunkelleitfähigkeit. Etwa ab 225° ist kein meßbarer Unterschied mehr zwischen beiden Leitfähigkeitsarten festzustellen. Dieses Verhalten rechtfertigt die vorher gegebene Erklärung für das Verschwinden der Photospannung auf Grund der Diffusionsgleichung. Die Beobachtung eines Knicks in der Leitfähigkeitskurve bei 195°, über die bereits von Engelhard und Lange[1]) berichtet wird, konnte hier bestätigt werden, und zwar auch bei Belichtung.

4. Thermokraft in Abhängigkeit von der Temperatur

In Übereinstimmung mit den Messungen von Vogt und Schweickert[2]) nimmt die Thermospannung mit abnehmender Temperatur zu. In dem bei den Photospannungsmessungen in

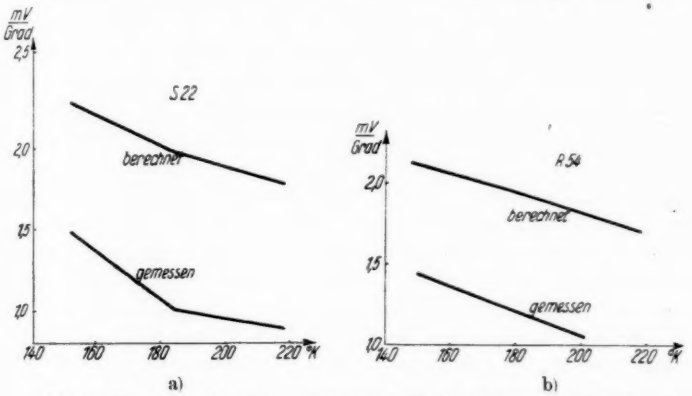


Abb. 7. Thermokraft (Thermospannung pro Grad Temperaturdifferenz) in Abhängigkeit von der absoluten Temperatur. Berechnung vgl. Fußnote 3) Abschn. V

Frage kommenden Temperaturbereich zeigen die Thermospannungen den in Abb. 7 angezeigten Verlauf. Der Anstieg der Spannung ist jedoch nicht für alle Proben gleichmäßig. Während die Probe „R 54" kein verändertes Verhalten von der Stelle an zeigt, an der die Leitfähigkeitskurve einen Knick macht, steigt die Thermospannung für die Probe „S 22" unterhalb der Knicktemperatur steiler an als oberhalb.

An dieser Stelle muß noch auf ein besonderes Verhalten der Thermospannung hingewiesen werden. Nach früheren Messungen[3])

1) E. Engelhard, a. a. O.; B. Lange, Die Photoelemente und ihre Anwendung, 2. Aufl. Leipzig 1940.

2) W. Vogt, a. a. O.; H. Schweickert, Ann. d. Phys. [5] **34**. S. 250. 1939.

3) H. Schweickert, a. a. O.; W. Rohde, Ann. d. Phys. [5] **34**. S. 259. 1939.

ist die Thermokraft (Thermospannung/Temperaturdifferenz) abhängig von der Temperaturdifferenz. Da hier die Temperaturdifferenz etwa 15° betrug, so ist vermutlich in Anlehnung an die damaligen Ergebnisse bei dem Vergleich mit den für kleine Temperaturdifferenz berechneten Werten der experimentelle Wert mindestens um 0,2 mV größer anzusetzen, wodurch sich eine bessere Übereinstimmung zwischen Messung und Berechnung ergeben würde.

5. Gleichrichtereffekt

Mit einer längeren Probe des gleichen Materials wurde untersucht, ob an den Grenzen Halbleiter–Metall eine Gleichrichterwirkung vorhanden ist. Dieser Versuch ist die Wiederholung der bereits von Mönch[1]) durchgeführten Messungen.

Eine etwa 7 cm lange und 2,5 cm breite Cu_2O-Probe, die mit Abnahmeelektroden versehen war, wurde zur Hälfte in flüssige Luft getaucht, so daß eine Elektrode auf der entsprechenden tiefen Temperatur war, während die andere sich noch etwa auf Zimmertemperatur befand. Die Probe wurde mit dem parallelen Licht der Nernstlampe belichtet, um den Widerstand des tief temperierten Teils zu erniedrigen. Die Leitfähigkeitsmessung erfolgte mit einer Spannung von etwa 350 Volt, so daß demgegenüber die an der Probe aufgetretene Thermo- und Photospannung, die wir hoch gerechnet mit 1 Volt ansetzen wollen, vernachlässigt werden konnte. Infolge Verdunstens der flüssigen Luft änderten sich ständig die Leitfähigkeitswerte, und es konnten zum Vergleich des Leitvermögens in beiden Stromrichtungen nur Mittelwerte aus Reihenmessungen genommen werden (vgl. nachfolgende Tabelle).

Stromstärke in beliebigen Einheiten	
Stromrichtung 1	Stromrichtung 2
15,5	
14,3	14,6
13,5	13,7
12,4	12,7
Mittel: **13,9**	**13,7**

Die Abweichung der so erhaltenen, mit einem Zeitfehler behafteten Mittelwerte ist mit etwa 1 % so gering, daß ein nennenswerter Gleichrichtereffekt nicht zu ersehen ist.

IV. Experimenteller Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit, Thermospannung und Photospannung

An Hand der bisherigen Messungen kann folgende von Mönch[2]) aufgeworfene Frage untersucht werden:

1) G. Mönch, Ann. d. Phys. [5] **36**. S. 6. 1939.
2) G. Mönch, Ann. d. Phys. [5] **36**. S. 566. 1939.

Ist die durch eine thermische Leitfähigkeitserhöhung in der einen Hälfte des Halbleiters erzielte Spannung (Thermospannung) gleich groß der durch Belichtung erhaltenen (Photospannung), wenn durch die Belichtung die gleiche Leitfähigkeitserhöhung erreicht wird wie durch eine entsprechende Temperaturerhöhung?

Zur Prüfung dieser Frage müssen die an gleichen Proben gemachten Messungen der Photospannungen (Abb. 5), Thermospannungen (Abb. 7) und der Leitfähigkeiten (Abb. 6) mit herangezogen werden.

Bei einer Temperatur T_1 werden zwei Leitfähigkeitswerte gemessen, nämlich der Dunkelwert σ_{1u} und der Lichtwert σ_{1b} (u = unbelichtet, b = belichtet) (Abb. 6). Den Wert von σ_{1b} finden wir in gleicher Größe noch einmal in der anderen Kurve, und zwar als Dunkelwert σ_{2u} bei der Temperatur T_2. Wir können uns also die bei einer Temperatur T_1 durch Belichtung erhaltene Leitfähigkeitserhöhung durch eine Temperaturerhöhung der unbelichteten Probe auf T_2 entstanden denken. Wenn wir nun, wie es bei der Erzeugung der Photospannung der Fall ist, nur eine Seite des Kristalls belichten, so haben wir an den Enden der Probe zwei Leitfähigkeitswerte, nämlich den bei der Versuchstemperatur T_1 im unbelichteten Zustande und den Wert, der, aus der Kurve entnommen, einer Temperatur T_2 entsprechen würde. Wir haben also längs der Probe ein Leitfähigkeitsgefälle, das durch das Temperaturgefälle T_2 bis T_1 entstanden gedacht werden kann und auf Grund dessen sich eine „Thermospannung" Θ bilden würde. Sollte nun die Größe der Photo- wie die der Thermospannung allein von den Leitfähigkeitswerten des Kupferoxyduls in der Nähe der Abnahmeelektroden abhängen, so müßte es möglich sein, die Photospannung unter Benutzung der Umdeutung als Thermospannung in ihrer Größe und Temperaturabhängigkeit aus der gemessenen Thermokraft berechnen zu können. Wenn wir die aus den Leitfähigkeitskurven des belichteten und unbelichteten Zustandes ermittelte „Temperaturdifferenz" multiplizieren mit dem für die Versuchstemperatur gültigen Wert der Thermokraft, so müßte die errechnete Spannung gleich der bei der betreffenden Temperatur gemessenen Photospannung sein.

In der Abb. 8 sind nun für die beiden Proben jeweils die gemessene Photospannung in mV und die aus Leitfähigkeit und Thermospannung errechneten Werte in Abhängigkeit von der Temperatur eingetragen worden. Man ersieht eine gute Übereinstimmung beider Kurven[1]. Wir folgern hieraus folgenden Satz:

1) Die zu erwartende Abweichung der gemessenen und errechneten Spannungen bewegt sich innerhalb von Grenzen, die durch Mängel der Versuchsstücke, der Versuchsanordnung (z. B. unzerlegtes Licht) und das Auftreten von

Die Ausbildung einer Spannungsdifferenz ist im wesentlichen bedingt durch die Werte der Leitfähigkeiten des Halbleiters an den Abnahmeelektroden, unabhängig davon, ob die Leitfähigkeitserhöhung an der einen Elektrode durch Erwärmen (Thermospannung) *oder Belichten* (Photospannung) *erreicht wird.*

Besonders bemerkenswert ist auch der Knick in den aus Thermospannung und Leitfähigkeit errechneten Spannungskurven (Abb. 8)

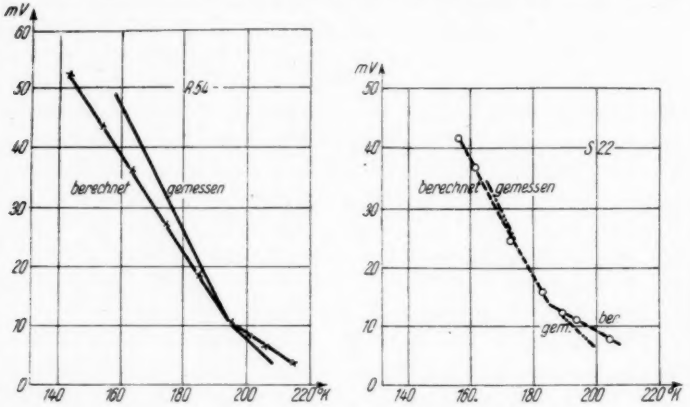


Abb. 8. Photospannung gemessen und berechnet

bei etwa 190° K, also an der Stelle, an der auch die Leitfähigkeitskurve (Abb. 6) einen Knick aufweist. Da auch die gemessene Photospannung (Abb. 5) ein scharfes Abbiegen an dieser Stelle und keinen allmählichen Übergang zeigt, erscheint dies ebenfalls als Bestätigung für den Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit – Thermospannung einerseits und Leitfähigkeit – Photospannung andererseits.

V. Ergebnisse zur formelmäßigen Darstellung des Photoeffektes

Mit den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit ist die erste der von Mönch[1]) aufgeworfenen Fragen nach einem Zusammenhang der Leitfähigkeit mit der Thermo- und der Photospannung bejahend beantwortet.

Meßfehlern bedingt sind. Die Übereinstimmung beider Spannungswerte wird vermutlich um so größer sein bei der Verwendung zerlegten Lichtes, je reiner die Beschaffenheit der Kristallite ist und je dünner die Proben sind, so daß irgendwelche Nebeneffekte, die in der Querrichtung der Kristallitplatte, also in Richtung des eingestrahlten Lichtes auftreten, zu vernachlässigen sind.

1) G. Mönch, Ann. d. Phys. [5] **36**. S. 566. 1939.

Auf die Frage, ob folgende Formel (3)[1]

$$\Theta = 2 \cdot 10^{-4} \left[\frac{16{,}5 + 1{,}5 \log T'' - \log n(T')}{\log\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_b}\right)} \right] T \cdot \log \frac{\sigma_b}{\sigma_a} \text{ (Volt)}$$

die Ergebnisse richtig darstellt, soll nur ganz allgemein eingegangen werden. Da aus den Kurven (Abb. 7) zu entnehmen ist, daß die absolute Größe und die Temperaturabhängigkeit der Thermospannung bei tiefen Temperaturen durch die von Mönch errechnete Formel[2]) in großen Zügen richtig dargestellt wird, ist auf Grund des obigen Satzes, der die Leitfähigkeit mit der Thermo- und der Photospannung in Beziehung bringt, zu folgern, daß die hier angeführte Formel für die Beziehung zwischen Leitfähigkeit und Photospannung diese auch in großen Zügen wiedergibt.

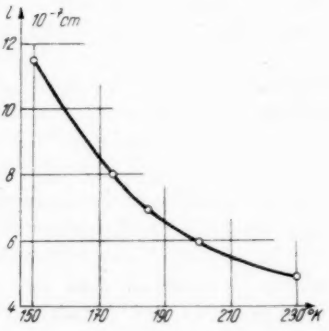


Abb. 9. Freie Weglänge als Funktion der absoluten Temperatur (nach Engelhard)

---

1) G. Mönch, Ann. d. Phys. [5] **36**. S. 565. 1939.

2) G. Mönch, Ann. d. Phys. [5] **36**. S. 565. 1939. Die Formel (2) für die Thermospannung lautet:

$$|\Theta| = \left(33{,}1 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-4} \log T'' - 2 \cdot 10^{-4} \log n(T')\right) \Delta T \text{[Volt]}.$$

$n(T')$ ist die Elektronenkonzentration des Halbleiters bei der Temperatur T', und wir finden sie aus der Gleichung für die Leitfähigkeit

$$\sigma = 3{,}84 \cdot 10^{-10} \frac{l(T)}{\sqrt{T}} n(T) \text{ (Ohm}^{-1} \text{ cm}^{-1}).$$

$l(T)$ bedeutet dabei die freie Weglänge. Da uns für unsere Proben keine experimentell bestimmten Werte von $l(T)$ zur Verfügung stehen, sind wir auf die Entnahme von Werten aus den Arbeiten von Engelhard angewiesen. Die Temperaturabhängigkeit dieser Werte hat den in Abb. 9 angegebenen Verlauf. Wenn auch die Absolutwerte nicht für alle Proben zutreffend sind, so ist der hierdurch bedingte Fehler in der Größe der Thermospannung deshalb nicht allzu schwerwiegend, weil „n“ logarithmisch in die Gleichung für die Thermospannung eingeht. Wie die Rechnung ergibt, liegen die berechneten Thermokraftwerte höher als die gemessenen, weisen jedoch die gleiche Temperaturabhängigkeit auf (vgl. Abb. 7); eine größere Übereinstimmung ist kaum zu erwarten, da die Formel nur die Leitfähigkeit als Einzelmerkmal der Probe aufnimmt.

VI. Zusammenfassung der Ergebnisse

1. Das Auftreten einer lichtelektrischen Spannung durch einseitige Belichtung eines Cu_2O-Stücks bei tiefen Temperaturen wird best.

2. Diese lichtelektrische Spannung ist linear von der Temperatur abhängig und fällt mit steigender Temperatur. Bei etwa 190° K weist die Gerade einen Knick auf. Bei 225° K ist der Photoeffekt unmeßbar klein geworden.

3. Für die gleichen Proben werden Dunkel- und Lichtleitfähigkeitskurven aufgenommen, die ebenfalls bei etwa 190° K einen Knick zeigen. Der Unterschied der beiden Leitfähigkeiten verschwindet an der gleichen Stelle, an der die Photospannung Null wird.

4. Auf Grund der Überlegungen ergibt sich folgender experimentell gefundener Zusammenhang zwischen Thermo- und Photospannung: Die aufgetretene Spannung ist unabhängig von der Art der Erzeugung (Temperaturerhöhung bzw. Belichtung einer Elektrode). Maßgebend sind nur die Werte der Leitfähigkeiten des Halbleiters an den Abnahmeelektroden.

Herrn Prof. Dr. Friedrich danke ich für die in seinem Institut gewährte Gastfreundschaft und seine Hilfe bei der Durchführung der Arbeit, Herrn Dozent Dr. Mönch für die Anregung und den steten Rat, der Helmholtz-Gesellschaft für ihre Unterstützung.

Berlin, Institut für Strahlenforschung der Universität, April 1940.

(Eingegangen 22. Mai 1940)

Untersuchungen der Polarisation des Kanalstrahlleuchtens[1])

Von S. Richter (z. Z. im Felde)

(Mit 7 Abbildungen)

Auszug

Abhängigkeit der Polarisation der Wasserstofflinien beim Stoß von H auf He und D auf He von der Teilchengeschwindigkeit. Die Analogie zwischen Elektronenstoß- und Kanalstrahlleuchten. Die Druckabhängigkeit der Polarisation des Kanalstrahlleuchtens. Die Polarisation der Wasserstofflinien beim Stoß von He auf H_2 und D_2. Die Frage der Abhängigkeit des Polarisationgrades vom Strahlenquerschnitt und der Stromdichte. Die elektrische Beeinflussung der Polarisation der Wasserstoff- und Neonkanalstrahlen.

A. Einleitung. Ziel der Arbeit

Die ersten Untersuchungen über die Polarisation des Kanalstrahlleuchtens unternahm Stark 1906[2]). Er fand an Wasserstoffkanalstrahlen folgendes grundlegendes Ergebnis: Die Lichtemission des eigentlichen Kanalstrahls sowie des vor der Kathode befindlichen Pinsels ist derart polarisiert, daß der elektrische Vektor die Fortpflanzungsrichtung des Strahles bevorzugt. Durch die späteren Messungen mit Lunelund[3]) wurde dieser Effekt bestätigt. Mit der damals für dergleichen Versuche noch unzulänglichen Apparatur (Entladungs- und Beobachtungsraum waren noch nicht voneinander getrennt) konnte aber eben nur festgestellt werden, daß eine Polarisation vorhanden war. Erst nachdem vor allem die Vakuumtechnik erhebliche Fortschritte gemacht hatte und auch das Wiensche Kanalstrahlrohr mit einer Gastrennungskathode Verwendung fand, sind mannigfache Untersuchungen über den Stark-Lunelund-Effekt angestellt worden. Insbesondere suchte man durch elektrische und magnetische Beeinflussung des Kanalstrahles dem Problem näher zu kommen.

Das reine *Abklingleuchten*, also das Leuchten der Atome, welche nach der Anregung im höchsten Vakuum verlaufen, ist im feldfreien Raum unpolarisiert[4]). Läßt man den Kanalstrahl in einen gas-

1) D 15.
2) J. Stark, Verh. d. D. Phys. Ges. 8. S. 104. 1906.
3) J. Stark u. H. Lunelund, Ann. d. Phys. 46. S. 86. 1915.
4) R. Döpel u. R. v. Hirsch, Ann. d. Phys. 82. S. 16. 1927.

gefüllten Raum eintreten, wie es in den meisten Fällen üblich ist, so beobachtet man Stoßleuchten (*Druckleuchten*). Dabei ist wiederum die Emission der bewegten und ruhenden Atome zu unterscheiden. Die Frage, ob die Polarisation hauptsächlich der „bewegten" oder der „ruhenden" Intensität zukommt, war lange umstritten. Sie wurde durch die Arbeit von Frl. Lubb[1]) endgültig geklärt: Zwar ist in *beiden* Fällen Polarisation vorhanden, doch ist diese beim bewegten Leuchten wesentlich stärker. Abgesehen von dieser Tatsache ist so ziemlich alles übrige bei der Polarisation des Kanalstrahlleuchtens ungeklärt.

Diese Unsicherheit ließ es wünschenswert erscheinen, einige Gesetzmäßigkeiten der Polarisation des Kanalstrahlleuchtens zu untersuchen, in der Hoffnung, dadurch den Ursachen der Erscheinungen auf die Spur zu kommen.

Es galt zunächst, die Abhängigkeit der Polarisation von der Entladungsspannung für einen möglichst großen Bereich an Wasserstoffkanalstrahlen nachzumessen. (Die früheren Untersuchungen beschränkten sich immer nur auf kleine Spannungsdifferenzen.) Es erhebt sich nun die Frage, wieweit es sinnvoll ist, zu kleinen Geschwindigkeiten überzugehen. Einmal werden die Intensitäten so schwach, daß die Belichtungszeiten außerordentlich ansteigen, andererseits ist dann die Zusammensetzung des Kanalstrahles so inhomogen, daß man keine genauen Aussagen mehr über die Art der Lichtanregung machen kann. Aus diesen Gründen wurde nur bis 5 kV herab beschleunigt. Nach oben ist die Grenze bei 40 kV gewählt worden, da für höhere Geschwindigkeiten die Erscheinungen uninteressant sind. Es schien weiterhin vorteilhaft, Bedingungen vorzufinden, unter denen die Polarisation von vornherein groß ist. Einige Vorversuche hatten die Serienabhängigkeit im Sinne der letzten Starkschen Resultate[2]) bestätigt. Es war also zweckmäßig, für alle Auswertungen die Linie H_α heranzuziehen.

Gleichzeitig sollten diese Messungen auch für D-Kanalstrahlen ausgeführt werden. Es ist auf diese Weise leicht festzustellen, ob die Polarisation ein reiner Geschwindigkeitseffekt ist. Die Stoßteilchen H und D unterscheiden sich nur durch die Masse, man kann also ohne weiteres auf gleiche Geschwindigkeiten beziehen und die entsprechenden Polarisationsgrade vergleichen. — Hieran schließt sich selbstverständlich die Frage: Wie liegen die Verhältnisse bei

---

1) W. A. Lubb, Arch. Neerland **14**. S. 118. 1933.

2) J. Stark, R. Ritschl u. H. Boncke, Phys. Ztschr. **37**. S. 427. 1936; J. Stark u. H. Verleger, Phys. Ztschr. **38**. S. 360. 1937.

der ruhenden Intensität der Lichtanregung? Um auch dafür Anhaltspunkte zu gewinnen, wurde die Rolle der Stoßpartner vertauscht und He-Kanalstrahlen in H, H_2 und D_2 geschossen.

Am unsichersten sind die Angaben über die „Druckabhängigkeit“[1]. Auch hier ist vorerst zu überlegen, in welchen Grenzen man den Druck im Beobachtungsraum variieren soll. Über $5 \cdot 10^{-2}$ mm muß im Kanalstrahl schon mit Sekundäreffekten gerechnet werden, welche die Polarisation stören. Deshalb wurden bei höheren Gasdrucken keine Messungen gemacht.

Im Verlaufe der Arbeit tauchte ein Gesichtspunkt auf, der von vornherein als nebensächlich übergangen wurde. Es zeigte sich nämlich, daß bei einer Veränderung des *Strahlquerschnittes* die Polarisation bei sonst gleichen Bedingungen andere Werte annahm. Dieser Effekt ist zwar schon früher in einigen Arbeiten erwähnt, ihm jedoch keinerlei Bedeutung beigemessen worden. Er erschien immerhin merkwürdig genug, um genauere Untersuchungen darüber anzustellen. Es wurde dafür eine besondere Apparatur angefertigt, die es ermöglichen sollte, auch quantitative Ergebnisse zu gewinnen. Das Resultat dieser Messungen ließ es noch notwendig erscheinen, eine vermutliche Stromdichteabhängigkeit der Polarisation nachzuprüfen.

Schließlich sollte noch qualitativ untersucht werden, wie ein elektrisches Querfeld von 25 kV/cm die Polarisation von Ne-Kanalstrahlen beeinflußt[2] (im Vergleich zu den bisherigen Messungen mit Wasserstoff), um einen Anhaltspunkt zur Deutung der dabei auftretenden Änderung der Polarisationsrichtung zu gewinnen.

B. Versuchsanordnungen und Meßmethoden

Die Messungen wurden an Kanalstrahlen von 5—40 kV vorgenommen, zu deren Erzeugung eine Apparatur diente, wie sie kürzlich von Junkelmann[3] zur Bestimmung von Anregungsfunktionen verwendet worden ist (Abb. 1).

Das Entladungsrohr bestand aus einem 2-Liter-Kolben von Jenaer Geräteglas, in den die Anode aus Molybdänblech von 0,3 mm Dicke und 50 mm Durchmesser eingeschmolzen war. Sie befand

1) A. Weigl, Ann. d. Phys. **82**. S. 1. 1927; J. Stark u. M. Schön, Phys. Ztschr. **37**. S. 431. 1936.

2) A. Weigl, Naturw. **16**. S. 1042. 1928; K. L. Hertel, Phys. Res. **29**. S. 848. 1927; J. Stark, R. Ritschl u. H. Verleger, Phys. Ztschr. **39**. S. 503. 1938.

3) R. Junkelmann, Ztschr. f. Phys. **107**. S. 561. 1938.

sich in dem kugelförmigen Teil, der beim Glühen des Bleches eine große Wärmeableitung bewirken sollte. Der Stutzen am oberen Ende war für die Zuleitung des Entladungsgases angesetzt. Das Rohr wurde mit Pizein auf die Kathode gekittet. Diese war nach Art der bewährten W. Wienschen Gastrennungsmethode gebaut worden, so daß eine Verunreinigung der Gase durch Diffusion in den Entladungs- bzw. Beobachtungsraum von höchstens einigen Prozent angenommen zu werden brauchte. Der ganze Kathodenkörper bestand aus Stahl und war mit einem Kanal von 3 mm Durchmesser versehen (vgl. auch Abb. 3). Der untere Teil wurde später auf 4 mm aufgebohrt und konnte durch Einschieben von kleinen Röhrchen oder Aufschrauben einer Blende in seinem Querschnitt verändert werden. Das obere Stück der Kathode ragte etwa 20 mm in den Entladungsraum hinein, ohne seitlich an der Glaswand anzuliegen. Außerdem war das Glasrohr so abgeschliffen, daß es genau in den entsprechend ausgedrehten Ring des Kathodenkörpers paßte. Dadurch sollte vermieden werden, daß im Innern eine große Pizeinoberfläche vorhanden war, die sich während des Betriebes erwärmt hätte. Das letztere wurde außerdem durch die Wasserkühlung verhindert. Die eigentliche Kathodenoberfläche bildete eine 3 mm starke Aluminiumplatte, welche auf den Stahlkörper aufgeschraubt werden konnte.

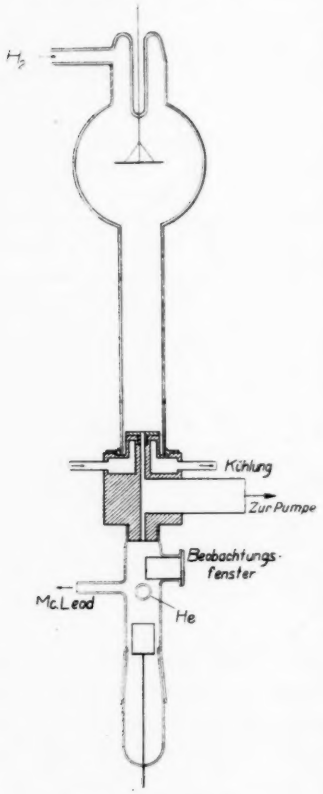


Abb. 1. Kanalstrahlrohr

Entladungs- und Beobachtungsgas wurden in der Mitte der Kathode gemeinsam über einen 35 mm weiten Stutzen mittels einer 4-stufigen Quecksilberdiffusionspumpe abgepumpt. Die Hochspannung wurde einer Röntgenanlage entnommen und durch eine Kapazität und Drossel geglättet.

Die Polarisation der Lichtanregung sollte in etwa 20 mm Entfernung von der Kathode untersucht werden. Zu diesem Zwecke verlief der Kanalstrahl in einem für die verschiedenen Versuche entsprechend angeordneten Beobachtungsraum. Ein Glasrohr von 30 mm Weite wurde an die Kathode angekittet. Durch ein planparalleles Fenster konnte der Strahl senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung beobachtet werden. Die weiteren Ansätze dienten noch als Zuleitung für das ruhende Gas und zur Messung des Druckes im Beobachtungsraum. Diese grundsätzliche Anordnung wurde für einige Untersuchungen abgeändert. Darüber wird in den einzelnen Abschnitten berichtet.

Der Kanalstrahl wurde durch ein Objektiv von 15 cm Brennweite und einer Öffnung 1 : 2,7 auf einen Dreiprismenspektralapparat abgebildet. Zur Messung des Polarisationsgrades wurde das Licht durch eine vor dem Spalt stehende Kalkspat–Quarzkeil-Kombination nach Hanle in die horizontal und senkrecht polarisierten Komponenten zerlegt.

Auf jede Platte wurden zur Prüfung, ob die Polarisationsoptik richtig justiert war, Kontrollaufnahmen mit unpolarisiertem Licht gemacht. Dazu mußte sich an der gleichen Stelle, wo sonst der Kanalstrahl verlief, eine Lichtquelle befinden, welche bestimmt unpolarisiertes Licht aussandte. Es wurde also zwischen der zylindrischen Elektrode (vgl. Abb. 3) und der Kathode eine Wasserstoffgasentladung erzeugt, und deren Spektrum aufgenommen. Alle diese Aufnahmen gaben, auch für verschiedene Linien, den Polarisationsgrad 1,0 ($\pm$ 0,08). — Wie schon oben erwähnt, befanden sich auf der Platte schließlich noch die Schwärzungsmarken. Falls die Belichtungszeiten innerhalb einer Serie zu unterschiedlich ausfielen, wurden diese durch Einschalten von Graufiltern besser ausgeglichen.

Die Reproduzierbarkeit von Kanalstrahluntersuchungen ist oftmals von vermeintlich unwichtigen Apparaturkonstanten abhängig. Dies gilt im besonderen auch für die Polarisationsmessungen. Daher rühren die vielfach abweichenden Resultate verschiedener Autoren, welche immer mit anderen Apparaturen gearbeitet haben. Absolutwerte von Polarisationsgraden sind immer nur für eine bestimmte Versuchsanordnung anzugeben. Für eine Fehlerbetrachtung kommen daher nur die Betriebsvariablen und die Methode der Auswertung in Frage. Die Entladungsspannung wurde während der Aufnahmen durch ein Hochspannungsvoltmeter nach Starke-Schröder angezeigt und konnte bei kleinen Schwankungen mittels eines Gaszufuhrschraubventils durch Änderung des Entladungsdruckes

sofort nachreguliert werden. Auch der Druck im Beobachtungsraum war soweit konstant zu halten, daß die geringen Abweichungen sich höchstens mit 2% auf das Ergebnis auszuwirken vermochten. Der größte Fehler entstand offenbar durch die photographisch-photometrische Meßmethode. Er muß infolge der Kornschwankungen und Plattenfehler mit 5% angenommen werden. Um möglichst die zufälligen Fehler auszuschließen, war es nötig, jede Einzelaufnahme mehrfach zu wiederholen, um einen einigermaßen sicheren Mittelwert bilden zu können. In einigen Fällen ist auch eine Linie mehrfach photometriert worden. Trotz aller dieser Vorkehrungen ist noch mit einem Gesamtfehler von 10% zu rechnen.

C. Ergebnisse und Diskussion

a) Spannungsabhängigkeit des Polarisationsgrades

1. *Beim Stoß von Wasserstoff auf Helium*

Hierzu wurde die in Abb. 1 angegebene Apparatur benutzt. In den Tabellen 1 und 2 werden die einzelnen Meßreihen zusammengestellt. Erstaunlich schien anfangs der große Unterschied in den P-Werten bei gleichen Spannungen, aber verschiedenem Strahlquerschnitt, denn die geringe Druckänderung konnte keinen so starken Einfluß haben. Es war also anzunehmen, daß ein anderer Parameter die Polarisation außerordentlich beeinflußt. Experimentell war nur eine Änderung an der Versuchsanordnung vorgenommen worden. Es hatte sich nämlich nach den ersten Auswertungen herausgestellt, daß der 1 mm breite Strahl die zur Abbildung notwendige Blende nicht gleichmäßig ausleuchtete, so daß die Spektrallinien entweder keilförmig oder auch zu schmal ausfielen. Aus diesem Grunde war der Kanal durch Einsetzen einer anderen Hülse auf 2 mm erweitert worden. Nach dieser, wie man zunächst annahm, belanglosen Änderung der Apparatur war die beobachtete Polarisation wesentlich besser. Da aber nur der Querschnitt des Kanalstrahles vergrößert worden war, mußte man dieses Ansteigen des Polarisationsgrades der Querschnittsänderung zuschreiben. An dieser Stelle trat also erstmalig die Frage nach einer „Querschnittsabhängigkeit" der Polarisation auf. Doch soll hier noch nicht näher auf diesen Effekt eingegangen werden. Immerhin ist es erforderlich, den Kanaldurchmesser als Betriebsvariable mit anzugeben.

Als erstes soll die hier beobachtete Abhängigkeit der Polarisation von der Voltgeschwindigkeit der Teilchen, die mit Messungen

Tabelle 1

Polarisationswerte für H_α beim Stoß von H ⟶ He.
Stromstärke im Entladungsrohr 4 mA. Kanaldurchmesser 1 mm

Entladungsspannung in kV	Beobachtungsdruck in mm Hg	Polarisation $= \frac{I_\parallel}{I_\perp}$	
40	$2{,}0 \cdot 10^{-2}$	1,02	
40	2,0	1,00	1,01
41	2,0	1,00	
30,5	2,2	1,04	
30	2,0	1,04	1,04
30,5	2,0	1,05	
20	2,0	1,11	
20	2,1	1,07	1,10
20	2,1	1,12	
10	1,7	1,16	
10	1,8	1,17	1,16
5	1,8	1,22	
5	1,9	1,21	1,21

Tabelle 2

Polarisationswerte für H_α bei H ⟶ He. Kanaldurchmesser 2 mm

Entladungsspannung in kV	Stromstärke in mA	Beobachtungsdruck in mm Hg	$P = \frac{I_\parallel}{I_\perp}$	
30	2,4	$0{,}98 \cdot 10^{-2}$	1,25	
30	2,4	0,98	1,27	
30	2,4	0,98	1,27	1,27
30	2,4	0,98	1,27	
30	2,4	0,98	1,27	
20	4,5	1,0	1,36	
20	4,5	1,0	1,39	
20	4,5	1,0	1,41	1,39
20	4,5	1,0	1,41	
10	4,5	0,86	1,48	
10	4,5	0,92	1,47	
10	4,5	0,94	1,51	1,47
10	4,5	0,96	1,45	
10	4,5	0,88	1,45	
5	4,2	1,28	1,62	
5	4,2	1,36	1,55	
5	4,2	1,20	1,52	1,58
5	4,2	1,36	1,60	
5	4,2	0,94	1,63	

anderer Autoren in Übereinstimmung steht[1]), diskutiert werden. Zu diesem Zwecke sind die in Tabellen 1 und 2 aufgeführten Werte in Kurvenform (vgl. Abb. 2) nochmals dargestellt, und dazu eine in der Arbeit von Romberg[2]) berechnete vergleichsweise gezeichnet.

1) A. Weigl, Ann. d. Phys. **82**. S. 1. 1927; R. Döpel u. R. v. Hirsch, Ann. d. Phys. **82**. S. 16. 1927.

2) W. Romberg, Ann. d. Phys. [5] **18**. S. 515. 1933.

Die Absolutwerte der theoretischen und gemessenen Polarisation sind verschieden. Es ist aber, wie sich noch herausstellen wird, nur eine Frage der Einstellung der Betriebsdaten, um auch quantitativ die theoretischen Werte zu erreichen. Das Wesentliche ist vielmehr, daß für einen größeren Geschwindigkeitsbereich nachgewiesen wurde, daß das Intensitätsverhältnis $I_\parallel / I_\perp$ stets größer als 1 ist und immer in gleicher Richtung (mit kleineren Geschwindigkeiten) ansteigt. (Auch für Deuterium: vgl. Abschn. c).

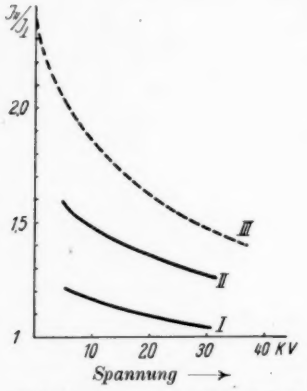


Abb. 2. Spannungsabhängigkeit der Polarisation von H_α beim Stoß H ⟶ He. Kurve *I* experimentell, nach Tab. 1. He-Druck $2 \cdot 10^{-2}$ mm. Kanaldurchmesser 1 mm. Kurve *II* experimentell, nach Tab. 2. He-Druck $1 \cdot 10^{-2}$ mm. Kanaldurchmesser 2 mm. Kurve *III* berechnet von Romberg

Romberg hat den Gang der Polarisation mit der Geschwindigkeit der Kanalstrahlteilchen berechnet, und zwar zunächst für den Fall des Wiedervereinigungsleuchtens, welches nach Untersuchungen von Döpel[1]) allerdings kaum für die Lichtanregung im Kanalstrahl verantwortlich zu machen ist. Er gibt aber in einem Anhang den Verlauf auch für das Stoßleuchten an. Seine Resultate stimmen mit den bisherigen experimentellen Befunden zumindest *qualitativ* überein. Die Größe $I_\parallel / I_\perp$ nimmt von 2,35 bei Kanalstrahlgeschwindigkeit „Null" gegen 1,0 bei sehr hohen Spannungen ab. Eine quantitative Übereinstimmung der gemessenen Kurven mit den theoretischen darf man nicht erwarten. Erstens sind die hier benutzten Kanalstrahlgeschwindigkeiten nicht homogen. Die Verteilung der Geschwindigkeit über einen größeren Bereich vermindert, wie man sich leicht überlegen kann, die Polarisation bei größeren Spannungen mehr als bei kleineren. So kann man den flacheren Verlauf der experimentellen Kurven erklären. Was die absoluten Werte der Polarisation betrifft, so muß man beachten, daß die Polarisation experimentell außer von der Kanalstrahlgeschwindigkeit noch vom Druck und vom Strahlquerschnitt abhängt, wie ein Vergleich der experimentellen Kurven *I* und *II* zeigt. Diese Abhängigkeit wird weiter unten ausführlich behandelt.

1) R. Döpel, Ann. d. Phys. [5] **16**. S. 1. 1933.

b) Vergleich der Polarisation von Elektronenstoß- und Kanalstrahlleuchten

Die Abnahme der Polarisation des Kanalstrahlleuchtens mit der Geschwindigkeit der Teilchen legt es nahe, die Lichtanregung durch Elektronen- und Kanalstrahlstoß zu vergleichen. Auch theoretisch besteht eine weitgehende Analogie zwischen Elektronen- und Ionenstoßanregung. Gemeinsam ist jedenfalls bei Elektronen- und Ionenstoßanregung das vorbeiziehende elektrische Feld, verschieden ist die Impulsübertragung. Wir wollen im folgenden die Analogie beider Erscheinungen vom experimentellen und theoretischen Standpunkt aus weiter verfolgen.

Beim Elektronenstoßleuchten ist eine teilweise Polarisation parallel oder senkrecht zur Strahlrichtung gemessen worden, deren Größe von der Voltgeschwindigkeit der anregenden Elektronen abhängt. Experimentell wurde bei allen Linien festgestellt, daß die Polarisation einige Volt über der Anregungsspannung ihren Maximalwert besitzt und für große Geschwindigkeiten sogar negative Werte[1]) annimmt. Ein Beispiel für diese Geschwindigkeitsabhängigkeit gibt Abb. 3.

Zur Erklärung der Polarisation nahm Skinner[1]) in Analogie zur Fluoreszenz ein hypothetisches Magnetfeld parallel zum Elektronenstrahl an, welches auf die Polarisation selbst keinen Einfluß hat, so daß also die magnetische Quantenzahl m des Atoms unverändert bleibt. Im wesentlichen kommt es darauf an, unter welchem Winkel das Elektron nach der Anregung von dem Atom gestreut wird. Zur genauen Berechnung etwa bei Edelgasen ist es nur nötig, zu wissen, welche Quantenzahlen im Grundzustand angeregt werden, um danach auf die möglichen Zeemankomponenten schließen zu können. Bei einem Multiplettsystem liegen die Verhältnisse schwieriger, da in diesem Falle mit einem Austausch von Stoß- und Atomelektron gerechnet werden muß.

Eingehende Rechnungen hat Bethe[2]) für Elektronenstoß ausgeführt. Diese sind im einzelnen recht kompliziert, besonders wenn die Polarisation auf die Richtung des Anfangsimpulses (Stoßrichtung) des Elektrons bezogen wird, und nur für Wasserstoff durchgeführt.

Seien p und p' die Impulse des Elektrons vor und nach dem Stoß, dann bildet der Vektor der Impulsänderung $p - p'$ mit p einen bestimmten Winkel φ, der sich durch den Wert der Stoßenergie ausdrücken läßt. Wird nun über alle möglichen Winkel gemittelt, was ja optisch beim Experiment auch der

1) $\frac{I_\parallel}{I_\perp} < 1$, Polarisationsgrad $\pi = \frac{I_\parallel - I_\perp}{I_\parallel + I_\perp}$ negativ.

2) H. Bethe, Handb. d. Phys. XXIV 1. S. 508.

Fall ist, so gilt die Größe $\overline{\cos^2\varphi}$ als ein Maß für den Wert der Polarisation. Trägt man schließlich diesen Mittelwert als Funktion der Elektronengeschwindigkeit auf, müßte die Polarisation bis zur Geschwindigkeit Null stetig anwachsen. Für $\overline{\cos^2\varphi} = \frac{1}{3}$ sollte $\frac{I_\parallel}{I_\perp} = 1$ werden.

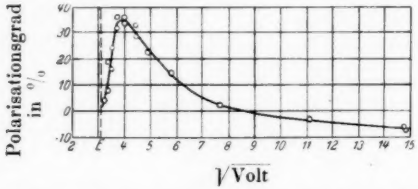


Abb. 3. Geschwindigkeitsabhängigkeit der Polarisation für die Hg-Linie 4047 Å bei Elektronenstoß. Nach Skinner und Appleyard [1])

Während für größere Spannungen eine erfreuliche Übereinstimmung mit der Theorie besteht, ist die plötzliche Abnahme der Polarisation unterhalb der Anregungsspannung offenbar überraschend. Diese Abweichung dürfte dadurch zu erklären sein, daß die von Bethe angewandte Bornsche Näherungsformel für kleine Elektronengeschwindigkeiten, also das Gebiet in der Nähe der Anregungsspannung, versagt. Dieses Gebiet kommt aber für den Kanalstrahlstoß wenigstens vorerst nicht in Betracht. Daher interessiert der Verlauf der Polarisation bei Elektronenstoß in Nähe der Anregungsspannung für die Kanalstrahlbetrachtungen nicht. Daß die Polarisation bei großen Kanalstrahlgeschwindigkeiten nicht auch kleiner als 1 wird, mag durch die große Steifheit der Kanalstrahlen verursacht sein. Sie werden bei der Anregung kaum abgelenkt, und deshalb weicht der Vektor der Impulsänderung nur wenig von der Kanalstrahlrichtung ab.

Völlig befriedigend wäre erst das Ergebnis, wenn auch in dem Gebiete von 0—5 kV Entladungsspannung die Größe der Polarisation einwandfrei bekannt wäre. Zur Orientierung wurde deshalb eine Aufnahme bei 2,5 kV (Druck $5 \cdot 10^{-3}$!) angestellt. Die Auswertung ergab für das Verhältnis $\frac{I_\parallel}{I_\perp} = 1{,}61$. Diesem Wert darf keineswegs große Bedeutung beigemessen werden, denn die Spannung liegt, wie schon eingangs festgestellt wurde, nicht im zuverlässigen Wirkungsbereich der Apparatur. Dennoch scheint es nicht ausgeschlossen, daß auch in diesem Gebiete die Polarisation des Kanalstrahlleuchtens analog dem des Elektronenstoßleuchtens verläuft. — Hier dürfte

1) H. W. B. Skinner u. E. T. S. Appleyard, Proc. Roy. Soc. **117**. S. 224. 1928.

vielleicht der Ausgangspunkt zu neuen Untersuchungen am Stark-Lunelund-Effekt liegen. Mit homogenen Kanalstrahlen kleiner Geschwindigkeit, oder auch „langsamen" Kanalstrahlen könnte der erwartungsgemäße Verlauf nachgeprüft werden. Daß das Kanalstrahlleuchten bei kleinen Spannungen noch, und zwar gut, polarisiert ist, wurde von W. Hanle und B. Quarder[1]) für Neonkanalstrahlen von etwa 1000 eV gezeigt (vgl. Tab. 1). Die Autoren haben aber keine quantitativen Messungen gemacht, so daß sich über den Verlauf der Polarisation keine Aussagen machen lassen. Immerhin ist es lohnend, die bei Neon für verschiedene Anregungsarten gefundenen Polarisationen zu vergleichen, was in Tab. 3 geschehen ist.

Tabelle 3

Polarisation bei Elektronenstoß- und Kanalstrahlleuchten für Neon

Wellenlänge in Å	Elektronenstoß $\frac{I_\parallel}{I_\perp}$	Langsame Kanalstrahlen	Ne-Kanalstrahlen in He $\frac{I_\parallel}{I_\perp}$
5882	0,88	⊥ wenig	0,93
5945	0,76	⊥ mittel	0,71
5975	—	0	0,99
6074	1,01	⊥ m	0,93
6096	1,31	∥ m	1,09
6143	0,76	⊥ m	0,68
6163	0,66	⊥ stark	0,69
6266	0,64	⊥ st	0,60
6335	0,78	∥ ?	0,72
6402	1,26	∥ ?	1,05
6506	1,30	∥ st	1,11
6533	0,61	⊥ m	0,81
6599	1,16	∥ m	1,06
6678	1,42	∥ m	0,92

⊥ Senkrecht zum Elektronenstrahl polarisiert.
∥ Parallel zum Elektronenstrahl polarisiert.

Sie gibt die von K. Steiner[2]) bei Neonelektronenstoß gemessenen Polarisationswerte in der 1. Spalte an. In der 2. und 3. Spalte sind die von W. Hanle und B. Quarder[3]) bzw. Angenetter und Verleger[4]) an Ne-Kanalstrahlen beobachteten gegenübergestellt.

Die Darstellung beweist nicht nur, daß beim Kanalstrahlleuchten ebenfalls von einer Quer- und Längspolarisation gesprochen werden

1) W. Hanle u. B. Quarder, Ztschr. f. Phys. **54**. S. 819. 1929.
2) K. Steiner, Ztschr. f. Phys. **52**. S. 516. 1929.
3) W. Hanle u. B. Quarder, Ztschr. f. Phys. **54**. S. 819. 1929.
4) H. Angenetter u. H. Verleger, Phys. Ztschr. **39**. S. 328. 1938.

kann, sondern zeigt qualitativ, insbesondere bei den starken Linien, eine erstaunliche Übereinstimmung mit dem Elektronenstoß. Damit weiß man jedoch noch nicht zu sagen, welche Parameter beim Kanalstrahlstoß die Polarisation bestimmen.

c) Stoß von Deuterium auf Helium

Tabelle 4

Polarisationswerte für D_α bei D ⟶ He. Kanaldurchmesser 2 mm

Entladungsspannung in kV	Stromstärke in mA	Beobachtungsdruck in mm Hg	$P = \frac{I_\parallel}{I_\perp}$	
30	2,5	$2{,}1 \cdot 10^{-3}$	1,98	1,93
30	2,5	2,1	1,85	
30	2,5	2,1	1,97	
20	4,2	$1{,}3 \cdot 10^{-2}$	1,99	1,88
20	4,2	1,3	1,86	
20	4,2	1,3	1,86	
20	4,2	1,3	1,74	
20	4,2	1,3	1,93	
10	4,5	1,1	1,99	1,94
10	4,5	1,1	1,93	
10	4,5	1,1	1,91	
10	4,5	$2{,}8 \cdot 10^{-3}$	1,98	1,99
10	4,5	2,8	2,06	
10	4,5	2,8	2,08	
10	4,5	2,8	1,90	
5	4,0	$0{,}9 \cdot 10^{-2}$	2,21	2,30
5	4,0	0,9	2,40	

Verwunderlich sind die ungewöhnlich hohen P-Werte in Tab. 4. Druck und Spannungsabhängigkeit laufen zwar in der gleichen Richtung wie bei H-Atomstoß, doch ist mit den Meßergebnissen schwerlich der vorgesehene quantitative Geschwindigkeitsvergleich anzustellen. Die Ursache dieser Abweichung liegt darin, daß die Versuchsbedingungen wahrscheinlich nicht dieselben waren wie zu den vorangehenden Untersuchungen. Die Apparatur war längere Zeit nicht in Betrieb gewesen, und daraufhin scheinen sich Verunreinigungen irgendwelcher Art begünstigend auf die Polarisation ausgewirkt zu haben. Eine Veränderung der optischen Anordnung, die zwar im Verlaufe der Arbeit mehrmals nachjustiert wurde, kommt wohl kaum in Betracht. Das Ergebnis war jedenfalls unsicher zu nennen, und es erwies sich als notwendig, zumindest die Spannungsserie für beide Anregungsarten (H- und D-Stoß) zu wiederholen.

Die photographischen Fehlerquellen waren gänzlich ausgeschaltet, indem sämtliche Aufnahmen auf eine Platte gemacht wurden. Die unterschiedlichen Belichtungszeiten wurden bis auf unbedeutende

Tabelle 5

Spannungsabhängigkeit der Polarisation beim Stoß von H bzw. D auf Helium. Kanaldurchmesser 2 mm. Beobachtet an H_α und D_α

	Entladungsspannung in kV	Stromstärke in mA	Beobachtungsdruck in mm Hg	$P = \frac{I_\parallel}{I_\perp}$	
H_α	20	4,2	$1{,}30 \cdot 10^{-2}$	1,38	1,40
	20	4,2	1,30	1,42	
	10	4,5	1,31	1,48	1,47
	10	4,5	1,30	1,46	
	5	4,0	1,30	1,56	1,56
	5	4,0	1,32	1,57	
D_α	40	4,0	$1{,}30 \cdot 10^{-2}$	1,45	1,43
	40	4,0	1,30	1,42	
	30	2,4	1,30	1,48	1,47
	30	2,4	1,31	1,47	
	20	4,2	1,28	1,60	1,58
	20	4,2	1,31	1,56	
	10	4,5	1,30	1,76	1,76
	10	4,5	1,31	1,76	

Abweichungen angeglichen. Besonderes Augenmerk mußte auf die restlose Entfernung des Wasserstoffs, überhaupt aller Verunreinigungen, gelegt werden. Bevor mit den neuen Deuteriumaufnahmen begonnen werden konnte, wurde das Kanalstrahlrohr etwa 1 Std. mit D_2 unter kräftigem Ausheizen der Anode betrieben. Die Anzahl der Aufnahmen war allerdings durch die Größe der photographischen Platte auf je 2 für jeden Meßpunkt von vornherein festgelegt. Wie die Tab. 5 zeigt, sind die Spannungen so gewählt worden, daß ein Geschwindigkeitsvergleich gut möglich ist.

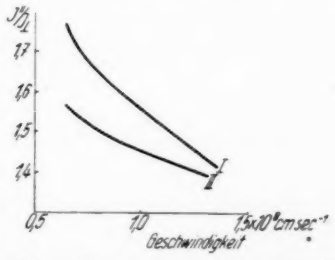


Abb. 4. Polarisation von Wasserstoff und Deuterium auf gleiche Geschwindigkeiten bezogen ($I = D_\alpha$, $II = H_\alpha$). Stoß von H bzw. D auf Helium

Die Polarisationsgrade bei D ⟶ He sind auch hier noch erheblich größer, als bei H ⟶ He, während die letzteren mit denen der Tab. 2 gut übereinstimmen, was für die Reproduzierbarkeit der Messungen bei sauberen Versuchsbedingungen spricht. Bezieht man nunmehr auf gleiche Geschwindigkeiten, sind auch hier die Werte nicht zur Deckung zu bringen (Abb. 4). Dabei wurde zur Geschwindigkeitsberechnung berücksichtigt, daß die Kanalstrahlteilchen nicht die volle Entladungsspannung durchlaufen, sondern nur etwa 65%.

Aus diesen Vergleichsmessungen kann man vielleicht schließen, daß die Polarisation kein reiner Geschwindigkeitseffekt ist, sondern daß der Impuls der Teilchen für den Polarisationsgrad maßgebend ist. Ganz sicher ist dieser Schluß indessen nicht, da aus Intensitätsgründen keine Geschwindigkeitshomogenisierung stattfand, und die Geschwindigkeitsverteilung der H-Kanalstrahlen sicher etwas anders ist wie der D-Kanalstrahlen.

d) Druckabhängigkeit der Polarisation

Recht uneinheitliche Angaben sind bis jetzt über die „Druckabhängigkeit" bekannt. Weigl[1]) beobachtete eine Abnahme der Polarisation mit steigendem Druck. Dagegen fand Stark[2]) häufig Zunahme mit dem Druck bis zu 0,1 mm und dann wieder Abnahme bei weiterer Drucksteigerung. Bei unseren Versuchen sinkt der Polarisationsgrad eindeutig mit dem Druck, wie Tab. 6 zeigt.

Tabelle 6

Abhängigkeit der Polarisation vom Gasdruck im Beobachtungsraum gemessen für H_α. Entladungsspannung 5 kV, Strom 4,2 mA, Kanaldurchmesser 2 mm

p mm Hg	4,12	4,12	5,00	5,32	$3{,}64 \cdot 10^{-2}$
			$p_{\text{mitt.}} = 4{,}4 \cdot 10^{-2}$		
$P = \frac{I_\parallel}{I_\perp}$	1,51	1,40	1,37	1,40	1,44*)
			$P_{\text{mitt.}} = 1{,}42$		
p mm Hg	1,28	1,36	1,20	1,36	$0{,}94 \cdot 10^{-2}$
			$p_{\text{mitt.}} = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$		
$P = \frac{I_\parallel}{I_\perp}$	1,62	1,55*)	1,52	1,60	1,63
			$P_{\text{mitt.}} = 1{,}58$		
p mm Hg	2,6	2,5	2,5	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$	
			$p_{\text{mitt.}} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$		
$P = \frac{I_\parallel}{I_\perp}$	1,82	1,92	1,87	1,96	
			$P_{\text{mitt.}} = 1{,}89$		

*) Vgl. Abb. 5a und 6a.

Dies mag auf den ersten Blick verwunderlich erscheinen, wenn man bedenkt, daß das reine Abklingleuchten, also bei „Druck Null", überhaupt unpolarisiert ist. Man muß hier tatsächlich streng „Ab-

1) A. Weigl, Ann. d. Phys. **82**. S. 1. 1927.
2) J. Stark, Ann. d. Phys. **46**. S. 16. 1915.

klingleuchten" und „Druckleuchten" unterscheiden. Das erstere rührt von Atomen her, welche außerhalb des Beobachtungsraumes schon im Entladungsrohr angeregt wurden. Da es noch nicht ganz klar ist, aus welchem Grunde das Abklingleuchten unpolarisiert ist, und es hier im übrigen nicht weiter berührt wird, soll von einer näheren Diskussion abgesehen werden.

Der Verlauf beim Druckleuchten ist nur so zu verstehen, daß man sich vorstellt, die Polarisation entstehe bei der Anregung und werde durch weitere Stöße der bereits *angeregt* fliegenden Teilchen gestört. Der Effekt könnte also als Depolarisation durch Fremdgas, wie es beim Fluoreszenzleuchten bekannt ist, bezeichnet werden. — Für die folgenden Untersuchungen wurde also als günstiger Druckbereich nicht etwa 0,1 mm, wie er häufig für Polarisationsuntersuchungen bei Kanalstrahlstoß benutzt wurde, gewählt, sondern immer darauf geachtet, daß der Beobachtungsdruck möglichst niedrig war.

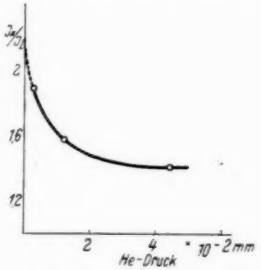


Abb. 5. Abhängigkeit der Polarisation vom Druck im Beobachtungsraum

Man kann einen Versuch machen, die Polarisation auf Druck Null zu extrapolieren und damit den theoretischen Wert von Romberg zu vergleichen. Aus Abb. 5 findet man auf diese Weise für eine Spannung von 5 kV etwa $P = 2{,}4$, während Romberg $P = 2{,}0$ berechnet (allerdings für Wiedervereinigungsleuchten, für Stoßleuchten gibt er die Spannungsabhängigkeit nicht an. Nimmt man für Stoßleuchten die gleiche Spannungsabhängigkeit an wie für Wiedervereinigungsleuchten, dann ergibt sich für Stoßleuchten für 5 kV $P = 2{,}2$). Bei diesem Vergleich bleibt als einzige Unsicherheit die experimentell gefundene, in den theoretischen Berechnungen jedoch nicht eingehende Abhängigkeit des Polarisationsgrades vom Strahlquerschnitt.

e) Die Polarisation beim Stoß von Helium auf H_2 und atomaren Wasserstoff

Bei den bisher ausgeführten Untersuchungen von ruhendem und bewegtem Leuchten wurde gewöhnlich die Wasserstofflinienanregung beim Stoß von H-Kanalstrahlen in He und von He-Kanalstrahlen in H_2 verglichen. Dabei stellte sich stets heraus, daß das ruhende Leuchten wesentlich schwächer polarisiert war. Nun unterscheiden sich aber beide Vorgänge dadurch, daß beim Stoß von He auf H_2 der

Wasserstoff noch teilweise dissoziiert werden muß. Dies könnte ein Grund für die geringere Polarisation beim ruhenden Leuchten sein. Nur dann, wenn *atomarer* Wasserstoff als ruhendes Gas benutzt wird, sind die beiden Stoßprozesse wirklich vergleichbar. Es wurden deshalb solche Versuche ausgeführt und beim Stoß He ⟶ atom. H eine größere Polarisation für die ruhende Intensität erwartet als beim Versuch He ⟶ H_2.

Die Versuchsanordnung ist in Abb. 6 dargestellt:

Sie bestand aus einem Woodschen Rohr[1]) und ist im wesentlichen nach den Erfahrungen von Bonhoefer gebaut worden.

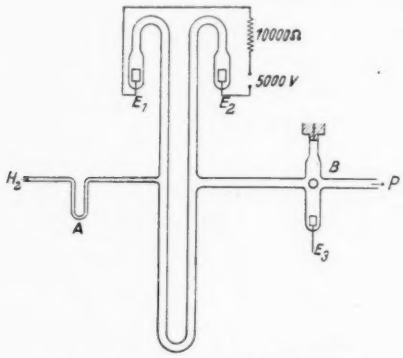


Abb. 6. Woodrohr zur Erzeugung von atomarem Wasserstoff

Die H_2-Zufuhr geschah in gleicher Weise wie sonst zum Beobachtungsraum. Zwischen den Al-Elektroden E_1 und E_2 wurde eine Wasserstoffgasentladung aufrechterhalten, die etwa mit 50 mA brannte. Der atomare Wasserstoff strömte nach dem Beobachtungsraum und wurde dort mittels einer zusätzlichen 2 stufigen Hg-Diffusionspumpe kräftig abgesaugt. Der Beobachtungsdruck betrug (auch für H_2) $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ mm, während im Woodschen Rohr ein Druck von etwa 0,1 mm herrschte. Die Entladungsspannung lieferte ein Hochspannungstransformator von 1 kVA Leistung. Um eine Rekombination des atomaren Wasserstoffs an den Glaswänden der Zuleitung weitgehend auszuschalten, konnte zu Reinigungszwecken von E_3 aus ebenfalls eine Entladung nach E_2 erzeugt werden. Um schließlich möglichst keine Metalloberfläche in der Nähe der Beobachtungsstelle vorzufinden, die ebenfalls zu einer Rückbildung Anlaß gegeben hätte, wurde deren Abstand von der Kathode um 60 mm vergrößert, außerdem wurde auch die Hilfselektrode E_3 weiter von dieser Stelle entfernt eingeschmolzen.

Das ganze Experiment ist nunmehr vor allem eine Frage nach der Konzentration des atomaren Wasserstoffs im Beobachtungsraum geworden. Als Maß dafür wurde zuerst nur die Intensität des Balmerspektrums der Entladung im Woodschen Rohr gewählt, und

1) R. Wood, Phil. Mag. **42**. S. 729. 1921.

danach die optimalen Versuchsbedingungen eingestellt. Besser kann man jedoch aus den verschiedenen Anregungsprozessen bei H bzw. H_2 im Kanalstrahl auf die Konzentration schließen. Es treten dabei nämlich zwei Reaktionen ein, wie sie folgende Gleichungen wiedergeben:

(1) $$H + He_{bew.} \longrightarrow H^* + He$$

(2) $$H_2 + He_{bew.} \longrightarrow H^* + H + He$$

Wenn der atomare Wasserstoff überwiegend vorhanden wäre, so müßte der Vorgang (1) wesentlich häufiger realisiert sein als (2). In der Tat sind die Wasserstofflinien beim Stoß von He auf H intensiver. — Das Nachleuchten des Wasserstoffs, welcher aus der Woodschen Entladung über ein 40 cm langes Rohr nach dem Beobachtungsraum strömte, war nicht etwa ein Abklingleuchten, sondern stellte eine Nebenentladung nach der Hg-Pumpe dar. Es war nicht möglich, dieses Leuchten durch Erden der einen Elektrode vollständig zu beseitigen. Die Messungen konnten dennoch nicht beeinflußt werden, denn wie eine Kontrollaufnahme zeigte, hätte jene zusätzliche Belichtung sich erst bei etwa 10facher Expositionszeit bemerkbar machen können.

Das Ergebnis zeigt Tab. 7.

Tabelle 7

Vergleich der Polarisation bei $He \longrightarrow H_2$ und $He \longrightarrow H$.
Entladungsspannung 20 kV, Strom 4,2 mA, Druck $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ mm Hg

Spektrumslinie	$P = \frac{I_\parallel}{I_\perp}$ bei $He \longrightarrow H_2$		$He \longrightarrow H$	
H_α	1,25 1,26	1,26	1,19 1,19 1,20	1,19
He (5876)	1,39 1,43	1,41	1,32 1,42	1,37

Ein Unterschied in den Polarisationswerten ist weder beim ruhenden Wasserstoffleuchten, noch bei dem gleichzeitig beobachteten bewegten Heliumleuchten vorhanden. Man könnte fast von einer Änderung sprechen, die entgegen den erwarteten Resultaten verläuft, doch liegen die geringen Abweichungen innerhalb der Fehlergrenze. Die praktisch gleichbleibende Polarisation beweist, daß die Voraussetzungen für die Anregung in beiden Fällen offenbar gleich gewesen sind. Entweder ist beim Stoß von He auf H_2 doch von vornherein atomarer Wasserstoff im Beobachtungsraum, oder, was weit wahrscheinlicher ist, der atomare Wasserstoff hat sich im 2. Falle bereits in starkem Maße in der verhältnismäßig langen Zuleitung

rekombiniert. Dies konnte vermieden werden, wenn der Beobachtungsraum sich unmittelbar an dem Woodschen Entladungsrohr befunden hätte. Es ist jedoch zu bedenken, daß dann die Messungen durch den an dieser Stelle noch leuchtenden Wasserstoff als auch den zu hohen Gasdruck unsicher geworden wären. Deshalb war nur diese Kompromißlösung möglich.

f) Untersuchung des *ruhenden* Leuchtens beim Stoß von Helium auf H_2 bzw. D_2

Tabelle 8

Polarisation des ruhenden Leuchtens gemessen an H_α bzw. D_α. Entladungsspannung 15 kV, Strom 4 mA, Druck 10^{-2} mm, Kanaldurchmesser 2 mm

P $He \longrightarrow D_2$	P $He \longrightarrow H_2$
1,35	1,24
1,32	1,27
1,40	1,19
1,36	1,26
1,30	1,25
$P_{mitt.}$ 1,35	1,24

Nach Tab. 8 ist die Polarisation des ruhenden Leuchtens von D_2 etwas stärker als die von H_2. Auch beim bewegten Leuchten (Stoß von H bzw. D auf He) war, auf gleiche Geschwindigkeit bezogen, die D-Anregung stärker als die H-Anregung (vgl. Abb. 4). Beim ruhenden Leuchten (Stoß von He auf H bzw. D) sind aber die Geschwindigkeit der Stoßpartikel, also auch die Energie beim Stoß, und die Elektronenhüllen der beiden Stoßpartner gleich. Nach einer Überlegung von Massey und Smith[1]) sollte deshalb die Stärke der Anregung in beiden Fällen übereinstimmen. Damit ist aber nicht gesagt, daß auch die Winkelablenkung der He-Kanalstrahlteilchen und damit die Polarisation bei der Anregung von D_2 dieselbe ist wie bei H_2-Anregung. Da aber auch darüber noch keine Rechnungen bekannt sind, kann der Polarisationsunterschied auf diese Weise nicht sicher gedeutet werden.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, daß die Polarisation der bereits angeregten D-Teilchen durch Stöße mit D_2-Molekülen weniger stark gestört wird als die Polarisation der H-Atome durch die Stöße mit den H_2-Molekülen. Es wird sich dabei weniger um die Depolarisation durch Fremdgasmoleküle handeln, als daß beim Stoß $D \longrightarrow D_2$

1) H. S. W. Massey u. R. A. Smith, Proc. Roy Soc. (A) **142**. S. 142. 1933.

(und analog $H \longrightarrow H_2$) ein Resonanzeffekt auftritt, wie ihn die folgenden Gleichungen kennzeichnen:

$$D^* + D_2 \longrightarrow D_2 + D^*,$$
$$H^* + H_2 \longrightarrow H_2 + H^*.$$

Dabei ist es ziemlich sicher, daß die Vorzugsrichtung des angeregten Wasserstoff- bzw. Deuteriumatoms verlorengeht und die Strahlung durch solche Stöße depolarisiert wird. Es ist allerdings nicht bekannt, wie häufig dieser Resonanzeffekt erfolgt, doch sollte die Häufigkeit für leichten und schweren Wasserstoff verschieden sein. Daraus könnte auf einen Unterschied in der Polarisation bei H und D geschlossen werden.

g) Änderung der Polarisation mit dem Strahlquerschnitt

Schon eingangs wurde gesagt, daß der Polarisationsgrad des Wasserstoffleuchtens vom Querschnitt des Kanalstrahls abhängt, und zwar nimmt er mit dem Querschnitt zu. So ergab eine Vergrößerung des Kanaldurchmessers von 2 auf 4 mm eine Zunahme der Polarisation von 1,89 auf 2,07. Diese Abhängigkeit, welche auch schon in früheren Arbeiten beiläufig erwähnt ist, wurde hier nun weiter untersucht.

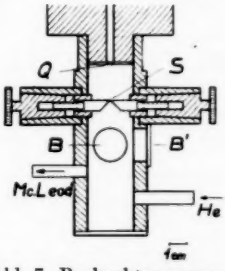


Abb. 7. Beobachtungsraum zur Untersuchung des Querschnittseffektes

Die dazu besonders angefertigte Apparatur ist in Abb. 7 gezeichnet:

Der quadratisch ausgeblendete Kanalstrahl mußte in 20 mm Entfernung von der Kathode durch den Spalt S laufen. Die Spaltschneiden konnten von außen über zwei Metallschliffe verschoben werden und begrenzten den Strahl variabel in der einen Richtung. Die Beobachtung erfolgte nach weiteren 20 mm entweder durch das Fenster B oder B'. Die Anordnung gestattete also:

1. Den Strahl in seinem Querschnitt senkrecht und parallel zur Beobachtungsrichtung zu verändern, und zwar ohne den Aufnahmebetrieb unterbrechen zu müssen,

2. gleichzeitig den Verlauf der Polarisation über die gesamte Kanalstrahlbreite zu untersuchen.

Der Spektrographenspalt wurde daraufhin abmontiert und der scharf begrenzte Strahl, welcher jetzt quadratischen Querschnitt haben mußte, selbst auf der photographischen Platte abgebildet. Bei 4 mm breitem Kanalstrahl betrug die Linienbreite 1,5 mm. Mit

einem Übersetzungsverhältnis von 1:40 konnte nun die Photometerkurve bis auf 60 mm auseinander gezogen werden, und es war die Möglichkeit geschaffen, das Intensitätsverhältnis an mehreren Stellen der Linie zu messen. — Die Wasserstofflinie 6563 Å wäre bei ihrer Breite und der geringen Dispersion bestimmt zum Teil von der Heliumlinie 6673 Å überdeckt worden. Dieses Überschneiden hätte hätte sich jedoch durch einen unsymmetrischen Verlauf der Photometerkurve bemerkbar machen müssen. Eine Probeaufnahme deutete das Erscheinen der Heliumlinie erst bei 3facher Belichtungszeit an.

Tabelle 9

Polarisationsgrad bei verschiedenem Strahlquerschnitt, gemessen an H_α für H ⟶ He, Entladungsspannung 5 kV, Strom 4 mA, Druck $4 \cdot 10^{-3}$ mm

Strahlbreite ∥ zur Beobachtungsrichtung verändert (⊥ dazu konst. 4 mm)	$P = \frac{I_\parallel}{I_\perp}$	Strahlbreite ⊥ zur Beobachtungsrichtung verändert (∥ dazu konst. 4 mm)	$P = \frac{I_\parallel}{I_\perp}$
1 mm	1,42 1,44 1,51 } 1,45	1 mm	1,49 1,52 1,59 1,55 1,49 } 1,52
2,5 mm	1,82 1,92 1,83 1,81 } 1,84	2 mm	1,79 1,72 1,72 1,71 1,80 } 1,75
4 mm	1,92 1,93 2,17 2,02 } 1,98	4 mm	1,85 1,85 1,98 1,85 1,98 } 1,92

Mit den Resultaten der Tab. 9 ist nun auch der quantitative Beweis geliefert, daß das Ansteigen der Polarisation ein reiner Querschnittseffekt ist. Außerdem ist eindeutig festgestellt, daß die Polarisation nicht etwa durch verschiedene *Strahldicke* bei der Beobachtung bedingt ist. Eine sichere Deutung ist nicht gelungen. Man könnte etwa an zweierlei denken:

1. An die Starksche Anschauung, daß die Anzahl der freien Elektronen im Kanalstrahl den Grad der Polarisation bestimmen, denn die Elektronenkonzentration ändert sich sicher mit dem Strahlquerschnitt.

2. Eine Erklärung könnte auch folgende Hypothese geben: Die freien Elektronen bilden um den Kanalstrahl eine Hülle, wandern

also nach dem Rande des Strahles, während die +-Ionen in der Mitte steckenbleiben. Dadurch entsteht ein radiales Feld um den Kanalstrahl, welches möglicherweise eine Starkeffektbeeinflussung der Polarisation verursachen kann. Es dürfte allerdings schwierig sein die Stärke dieses Feldes abzuschätzen. Dieser „Querschnittseffekt" dürfte nur bei den Wasserstofflinien auftreten, da nur in diesem Falle der Starkeffekt so ausgeprägt in Erscheinung tritt.

Der Versuch, die Polarisation an verschiedenen Stellen des Kanalstrahles zu messen, ergab zwar für alle die zahlreichen Auswertungen eine Zunahme der Polarisation nach dem Rande der Spektrallinien; doch liegt die Änderung einmal innerhalb der Fehlergrenzen, und andererseits kann es sich dabei sehr wahrscheinlich um einen photographischen Effekt handeln. Aus diesem Grunde sollen die Zahlenwerte nicht aufgeführt werden. Praktisch ändert jedenfalls die Polarisation ihren Wert innerhalb des Strahles nicht.

h) Abhängigkeit der Polarisation von der Stromdichte

Wenn die Querschnittsabhängigkeit auf eine größere Elektronendichte oder die Entstehung des Radialfeldes zurückzuführen ist, sollte man auch eine Abhängigkeit der Polarisation von der Stromdichte im Kanalstrahl erwarten. Experimentell konnte dies nur durch Variation der Stromstärke im Entladungsrohr verwirklicht werden. Immerhin verläuft diese proportional zur Stromdichte im Strahl. Besonders mußte darauf geachtet werden, daß wirklich bei gleicher Spannung gemessen wurde, denn die Stromdichte selbst konnte im Beobachtungsraum nicht bestimmt werden. Doch war aus der Leuchtintensität, die ja proportional zur Stromdichte verläuft, das Verhältnis auf etwa 1 : 3 abgeschätzt worden. Dies entspricht auch richtig der Stromstärkeänderung im Entladungsrohr (2,8 : 9,0 mA).

Die in Tab. 10 angeführten P-Werte zeigen nicht die erwartete Änderung der Polarisation, sie deuten eher den entgegengesetzten

Tabelle 10

Polarisationsgrad von H_α bei H ⟶ He für verschiedene Stromdichte im Kanalstrahl. Entladungsspann. 10 kV, Druck im Beobachtungsraum 10^{-2} mm Kanaldurchmesser 2 mm

	$P = \frac{I_\parallel}{I_\perp}$			$P = \frac{I_\parallel}{I_\perp}$	
Stromstärke 9,0 mA	1,47 1,42 1,48 1,40 1,52	1,46	Stromstärke 2,8 mA	1,59 1,60 1,53 1,56 1,65	1,59

Verlauf an, der Unterschied liegt aber noch innerhalb der Fehlergrenzen, trotzdem ist eine Erklärung für dieses Verhalten nicht gefunden worden.

i) Polarisationsänderung im elektrischen Querfeld

Ein zum Kanalstrahl und damit zur ursprünglichen Polarisationsrichtung schief liegendes Feld erzeugt eine Starkeffektaufspaltung, und, falls die Komponenten nicht getrennt werden, eine Elliptizität des Kanalstrahlleuchtens entsprechend der bei der Fluoreszenz von Hanle entdeckten Elliptizität[1]). Weigel[2]) fand diese Polarisationsbeeinflussung bei einem Feld, welches 45° zur Kanalstrahlrichtung geneigt war.

Aber auch dann, wenn ein (starkes) elektrisches Feld streng senkrecht zum Kanalstrahl liegt, wird die Polarisation des Kanalstrahlleuchtens beeinflußt[3]). Die hier benutzte Versuchsanordnung unterschied sich nur wenig von der in Abb. 3 gezeichneten. Es wurde lediglich der Kathodenkörper einseitig nach unten verlängert und eine Kupferelektrode von 10 mm Durchmesser seitlich über einen Glasschliff zugeführt. Die notwendige Querspannung wurde einem Hochspannungsaggregat entnommen und betrug 4 kV, so daß bei einem Elektrodenabstand von 1,5 mm mit einer Feldstärke von 25 kV/cm gerechnet werden konnte. Der Kanalstrahl wurde auf 3×1 mm Querschnitt ausgeblendet, und verlief senkrecht zur Feld- und Beobachtungsrichtung. Aus Tab. 11 ist zu entnehmen, daß sich die Polarisation im elektrischen Feld umkehrt. Während ohne elektrisches Feld die parallel zum Kanalstrahl schwingende Komponente überwiegt, ist im elektrischen Querfeld die Komponente parallel zu den Feldlinien, also senkrecht zum Kanalstrahl stärker. Dies steht in Übereinstimmung mit früheren Beobachtungen von Stark, Ritschl und Verleger[4]). Stark hat auch eine Deutung zu geben versucht, und zwar durch die Wirkung einer elektrischen Raumladung.

Es wurde nun der Versuch gemacht, das Umklappen der Polarisation im elektrischen Feld auf eine Starkeffektbeeinflussung der Polarisation zurückzuführen. Wenn diese Anschauung richtig sein sollte, dann dürfte diese Polarisationsänderung lediglich eine Eigen-

---

1) W. Hanle, Ztschr. f. Phys. **35**. S. 346. 1926.

2) A. Weigl, Die Naturw. **16**. S. 1042. 1928.

3) K. L. Hertel, Phys. Rev. **29**. S. 848. 1927; A. Weigl, Die Naturw. **16**. S. 1042. 1928; J. Stark, R. Ritschl u. H. Verleger, Phys. Ztschr. **39**. S. 503. 1938.

4) J. Stark, R. Ritschl u. H. Verleger, Phys. Ztschr. **39**. S. 503. 1938.

schaft des Wasserstoffs sein. Um dies wenigstens qualitativ sicherzustellen, war zu untersuchen, wie weit sich dieser Effekt auch an *Neon*-Kanalstrahlen zeigte, da in diesem Falle von vornherein bekanntlich nur mit einem geringen Starkeffekt zu rechnen ist.

Die entscheidende Messung wurde so vorgenommen, daß jeweils auf die gleiche photographische Platte zunächst die Aufnahmen für Wasserstoff (H_α) bei den in Tab. 11 angegebenen Betriebsdaten gemacht wurden. Hinzu kamen dann die Aufnahmen der beim Stoß von Neonkanalstrahlen in Helium angeregten Neonlinien, so daß ein qualitativer Vergleich der Schwärzungen ohne weiteres möglich war. Die ganze Aufnahmeserie wurde 2 mal wiederholt.

Tabelle 11

Änderung der Polarisation im elektrischen Querfeld von 25 kV/cm, gemessen an H_α, bei H ⟶ He, Entladungsspannung 20 kV, Strom 4,2 mA. Beobachteter Druck $2 \cdot 10^{-2}$ mm Hg

$P = \frac{I_\parallel}{I_\perp}$	
ohne Feld	mit Feld
1,21	0,70
1,21	0,74
	0,75
	0,71
	0,66
	0,71
$P_{\text{mitt.}}$ 1,21	0,71

Das Ergebnis der subjektiven Auswertung lautet folgendermaßen: Während bei Wasserstoff das Umschlagen der Polarisation deutlich zu beobachten ist, werden die Intensitätsverhältnisse bei den Neonlinien durch das Feld *nicht* verändert. Die bei Neon von vornherein schon vorhandene Quer- und Längspolarisation der verschiedenen Linien (vgl. Tab. 3) bleibt wenigstens qualitativ erhalten.

Dadurch ist bewiesen, daß die Polarisationsrichtung sich im elektrischen Feld nicht durch eine Beeinflussung der elektrischen Raumladung durch das Querfeld ändert, sondern durch einen Einfluß des *Starkeffektes*.

Damit kann allerdings noch keine sichere Erklärung gegeben werden. Man könnte an zweierlei Möglichkeiten denken. Wie Ryde[1]) ausgeführt hat, besitzen die Atomzustände mit größerer mittlerer Lebensdauer eine kleinere Wahrscheinlichkeit, Licht zu

1) N. Ryde, Ztschr. f. Phys. **111**. S. 705. 1939.

emittieren, ehe sie durch Zusammenstöße mit ruhenden Teilchen vernichtet oder ineinander überführt werden. Da nun bei H_α die σ-Komponenten im Mittel eine größere Lebensdauer besitzen als die π-Komponenten, würde die π-Intensität größer sein als die σ-Intensität, wie beobachtet[1]).

Noch wahrscheinlicher ist, daß unter den gegebenen Versuchsbedingungen die Besetzung der oberen Starkeffektniveaus von H_α nicht durch eine statistische Verteilung gegeben ist, sondern wenigstens eine Zeitlang die durch die spezielle Stoßanregung sich einstellende Verteilung bleibt, bis sie durch weitere Stöße der bewegten Korpuskel mit dem ruhenden Gas gestört und in die statistische Verteilung überführt wird. Nimmt man an, daß diejenigen Übergänge, welche bei Anregung des dritten Wasserstoffniveaus durch Licht (L_β) angeregt werden, auch durch Korpuskularstoß bevorzugt angeregt werden, so zeigt sich, daß die Niveaus, von denen die π-Komponenten von H_α ausgehen, doppelt so stark besetzt werden wie diejenigen, von welchen die σ-Komponenten ausgehen. Dies würde die beobachtete elektrische Beeinflussung der Polarisation erklären. Ob diese Deutung zutrifft, müssen erst neue Versuche zeigen.

D. Zusammenfassung

1. An Wasserstoff- und Deuterium-Kanalstrahlen wurde die Abnahme der Polarisation des bewegten Leuchtens im Helium mit wachsender Teilchengeschwindigkeit (im Gebiet von 5—40 kV) gemessen. Die Polarisation ist für D-Kanalstrahlen größer als für H-Kanalstrahlen. Die Beobachtungsergebnisse werden mit der Theorie verglichen.

2. Die Polarisation bei Elektronen- und Atomstoßanregung wird miteinander verglichen und weitgehende Analogie gefunden.

3. Die Druckabhängigkeit zeigt eine Abnahme der Polarisation mit *steigendem* Gasdruck im Beobachtungsraum von $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ bis $4{,}5 \cdot 10^{-2}$ mm Hg.

4. Zur Untersuchung des ruhenden Leuchtens werden Helium-Kanalstrahlen in H, H_2 und D_2 geschossen. Ein Unterschied zwischen H und H_2 wird nicht gefunden, da der Versuch He $\longrightarrow$ atomaren H experimentell schwer zu realisieren ist. Dagegen ist das ruhende D-Leuchten stärker polarisiert als das ruhende H-Leuchten.

5. Es wird quantitativ festgestellt, daß der Polarisationsgrad bei Vergrößerung des *Strahlquerschnittes* ansteigt. Danach wird vermutet, daß es sich dabei um eine Starkeffektbeeinflussung der

1) Auch Herr Ryde hat brieflich von dieser Möglichkeit gesprochen.

Polarisation handelt. Eine Abhängigkeit der Polarisation von der Stromdichte im Kanalstrahl scheint nicht zu bestehen.

6. Die Polarisation der H-Linien klappt in einem starken elektrischen Querfeld um, wie auch schon von anderen Autoren festgestellt wurde. Im Gegensatz dazu wird die Polarisation des Neon-Kanalstrahlleuchtens elektrisch nicht beeinflußt. Dieser Unterschied zwischen H- und Ne-Kanalstrahlen zeigt, daß die elektrische Beeinflussung des H-Kanalstrahlleuchtens ein *Starkeffekt* ist. Eine Deutung wird gegeben.

Diese Arbeit wurde in den Jahren 1937—1939 im Physikalischen Institut der Universität Leipzig ausgeführt. Herrn Prof. Hanle bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und die mir zuteil gewordene Förderung zu aufrichtigem Dank verpflichtet. Dem Direktor des Institutes, Herrn Prof. Hoffmann, danke ich für die Überlassung von Institutsmitteln und sein stetes Interesse an der Arbeit, Herrn Prof. Döpel für wertvolle Diskussionen, der Linde A.-G. für Überlassung von Edelgasen und der Helmholtz-Gesellschaft für die Herrn Prof. Hanle zur Verfügung gestellten Apparate.

Leipzig, Physikalisches Institut, Juni 1940.

(Eingegangen 8. Juni 1940)

Elektrisches und optisches Verhalten von Halbleitern. XV[1])

Elektrische Messungen am Bleiselenid[2])

Von Karl Bauer

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Erlangen)

(Mit 4 Abbildungen)

An geschmolzenem Bleiselenid werden elektrische Leitfähigkeit und Hallkonstante zwischen $+20°$ C und $-183°$ C gemessen, und zwar in Abhängigkeit von Selenentzug und -zufuhr. Ergänzend werden Thermospannungen untersucht.

Die elektrische Leitung in Bleiselenid ist überwiegend Ersatzleitung bei Proben mit Selenüberschuß, Überschußleitung bei Proben mit Bleiüberschuß. Absolutwert und Verhältnis beider Leitungsarten läßt sich durch entsprechende Behandlung des Bleiselenids in weiten Grenzen verschieben.

Inhalt: Einführung. — Herstellungsverfahren: Gewinnung des PbSe; Herstellung der Kristalle bzw. Kristallite; Verschiedene Zusammensetzung des Ausgangsmaterials; Selendampf- und Vakuumbehandlung; Meßanordnung und Meßverfahren. — Ergebnisse: Leitfähigkeit; Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit; Änderung der Leitfähigkeit durch Selen- oder Vakuumtemperung; Hallkonstante; Thermospannung. — Schlußbemerkung.

Einführung

Anschließend an frühere Mitteilungen aus dem Erlanger Institut über elektrische Eigenschaften von Halbleitern haben wir in PbSe einen Stoff gewählt, der den Metallen wesentlich näher steht als die früher untersuchten Stoffe Cu_2O[3]); ZnO[4]); CdO, SnO_2[5]). Dem Arbeitsplan und dem Deutungsversuch der Ergebnisse liegen Vorstellungen zugrunde, wie sie Gudden[6]), Wagner[7]), Schottky[7]) in ihrer

1) I—XIV sind in den Ann. d. Phys. erschienen.

2) D 29.

3) W. Vogt, Ann. d. Phys. [5] **7**. S. 183. 1930; B. Schönwald, Ann. d. Phys. [5] **15**. S. 395. 1932; E. Engelhard, Ann. d. Phys. [5] **17**. S. 501. 1933; F. Hommel, Ann. d. Phys. [5] **30**. S. 467. 1937.

4) O. Fritsch, Ann. d. Phys. [5] **22**. S. 375. 1935.

5) G. Bauer, Ann. d. Phys. [5] **30**. S. 433. 1937.

6) B. Gudden, Erlanger Ber. **62**. S. 289. 1930.

7) C. Wagner u. W. Schottky, Ztschr. phys. Chem. (B) **11**. S. 163. 1931; C. Wagner, Ztschr. phys. Chem. (B) **22**. S. 181. 1933; Ztschr. phys. Chem. (B) **22**. S. 195. 1933.

Störstellentheorie entwickelten. Danach ist ein Rückschluß auf den Leitungsmechanismus möglich, wenn man Leitfähigkeit, Halleffekt und Thermoeffekt und die Veränderung dieser Größen bei oxydierender und reduzierender Behandlung kennt. Aus experimentellen Ergebnissen ließen sich folgende Regeln aufstellen:

Tabelle 1

	Überschußleitung[1])	Mangelleitung (Defektleitung)
Leitfähigkeitsbeeinflussung	Leitfähigkeit wächst bei einer reduzierenden Behandlung	Leitfähigkeit wächst bei einer oxydierenden Behandlung
	Reduktionshalbleiter Metallüberschuß	Oxydationshalbleiter Metalloidüberschuß
Halleffekt	− (Ablenkung negativer Ladungen)	+ (Ablenkung positiver Ladungen)
Thermoeffekt	+ An der heißen Kontaktstelle fließen Elektronen vom Metall ⟶ Halbleiter bzw. in einer Differentialthermokette vom gutl. Halbl. ⟶ schlechtl. Halbl.	− An der heißen Kontaktstelle fließen Elektronen vom Halbleiter ⟶ Metall bzw. in einer Differentialthermokette vom schlechtl. Halbl. ⟶ gutl. Halbl.

Das Versuchsmaterial, auf das sich diese Aussagen stützen, ist jedoch noch dürftig. Als besonderer Mangel erscheint, daß häufig Leitfähigkeitsveränderungen, Hall- und Thermoeffekt nicht an einem Probestück gleichzeitig gemessen wurden. Deshalb wurden an unseren Proben jedesmal *drei* Messungen durchgeführt.

Wir haben bewußt die chemische Seite nicht berücksichtigt und keine Analysen durchgeführt; die wirkliche Zusammensetzung der Proben ist daher unbekannt. So wünschenswert eine Ergänzung nach der chemischen Seite wäre, so war sie doch für die uns beschäftigenden Fragen von geringer Bedeutung.

Über elektrische Leitung in Bleiselenid haben wir im Schrifttum nichts gefunden. Nach unseren Ergebnissen ist es ein reiner Elektronenleiter. Irgendwelche materielle Veränderungen beim Stromdurchgang wurden nicht beobachtet.

Der erste Teil der Arbeit enthält die Versuchsergebnisse, und zwar Messungen von Leitfähigkeit, Hallkonstante und Thermospannung einschließlich ihrer Temperaturabhängigkeit und in Abhängigkeit von der Vorbehandlung. Im zweiten Teil ist der Versuch gemacht worden, die sehr verwickelten Beobachtungen zu deuten und mit verschiedenen theoretischen Auffassungen zu vergleichen.

1) Wegen der Bez. B. Gudden, Naturw. **13**. S. 223. 1934.

Herstellungsverfahren

Gewinnung des PbSe

1. *Durch Zusammenschmelzen von Blei und Selen*[1])

Bleipulver[2]) und Selenpulver[2]) werden im Hartglaskolben gut vermischt und mit sehr kleiner Flamme langsam erwärmt. Unter lebhafter Feuererscheinung erfolgt die Reaktion, wobei ein Teil des Selens verdampft. Deshalb wurde bei den meisten Versuchen ein Selenüberschuß von 5—15 Gewichts-Prozent gegenüber dem stöchiometrischen Verhältnis zugegeben. Das Reaktionsgut ist eine feste, jedoch poröse Masse. Es wird zerschlagen und im Mörser zu feinem Pulver zerrieben.

2. *Durch Fällung mit Selenwasserstoff*[3])

Aus Bleiazetatlösung wird mit Selenwasserstoff Bleiselenid gefällt. Der Niederschlag wird abfiltriert, sorgfältig ausgewaschen und getrocknet. Da diese Herstellung sehr umständlich ist, haben wir nur *einen* Versuch durchgeführt um zu prüfen, ob sich das so hergestellte Schmelzgut von dem anderen in seinen Eigenschaften unterscheidet.

3. *Durch Einwirkung von Selendampf auf Bleischichten*

Im Hochvakuum wurde metallisches Blei in 1—3 μ Dicke auf eine Quarz- oder Glasplatte aufgedampft. Diese Platten wurden bei 250° Selendampf ausgesetzt bis sie durchseleniert waren. Anfänglich waren diese Bleiselenidschichten homogen, aber bei Messung der Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit und der Hallkonstanten, oder bei weiterer Selen- und Vakuumbehandlung werden die Schichten rissig und blättern ab. Diese Versuche wurden daher nicht weiter verfolgt.

Herstellung der Kristalle bzw. Kristallite

1. *Schmelzung im offenen Tiegel*[4])

In einem halbkugelförmig geschlossenen Röhrentiegel aus K-Masse wurde das Bleiselenidpulver mit Borax überschichtet, im Platin- oder Tammannofen bis knapp über den Schmelzpunkt[5]) erhitzt und sehr langsam abgekühlt, wobei der Temperaturbereich zwischen 1100° und 1000° C in etwa 1 Std. durchschritten wurde. Wir erhielten grobkristallines Bleiselenid (Kristallgröße einige Kubikmillimeter) und stellten daraus durch Zersägen, Schleifen und Polieren Versuchsplatten von rund $1 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1$ cm^3 her.

1) Gmelin-Kraut, Handb. d. anorg. Chem. IV. 2. S. 315. 1924.
2) Plumbum pro Analysi und Selenium praecipitatum (Schering-Kahlbaum).
3) Ludwig Vanino, Handb. d. präparat. Chem. I. Bd. Anorg. Tl. S. 110.
4) Gmelin-Kraut, a. a. O.
5) Nach Landoldt-Börnstein bei 1065°.

2. Schmelzung im Vakuum[1])

Das Bleiselenid befindet sich in einem Graphitrohr, das auf beiden Seiten mit einem Deckel verschlossen wird. Dieses Rohr wird in ein Quarzglasrohr eingeschmolzen. Um absorbierte Gase und Wasserdampf, die den später durchzuführenden Schmelzvorgang beeinflussen können, zu entfernen, wird das Quarzglasrohr bei 300° bis 400° C ausgepumpt. Quecksilberdämpfe werden ausgefroren. Das Quarzrohr wurde erst abgezogen, wenn ein angeschaltetes Manometer (Mc Leod) einen Druck von 10^{-5} mm Hg zeigte. Bei entsprechend langsamer Abkühlung entstanden hier Einkristalle von etwa 1 cm³ Größe.

Verschiedene Zusammensetzung des Ausgangsmaterials

Es ist versucht worden, schon aus dem Schmelzfluß Platten verschiedener chemischer Zusammensetzung durch Zugabe von Selen oder Blei im Überschuß herzustellen. Bleiselenid vermag einen Selenüberschuß aufzunehmen; dagegen gelang es uns nicht trotz aller Veränderung der Versuchsbedingungen (z. B. langsames Abkühlen, schnelles Abkühlen) brauchbare Platten mit kleinem Bleiüberschuß herzustellen. Derartiges Schmelzgut ist sehr spröde und jeder Versuch, daraus Platten zu schmirgeln, ist gescheitert. Erst bei größerem Bleizusatz (etwa 5%) wurde wieder ein bearbeitbares Schmelzgut erhalten; die so hergestellten Platten waren mechanisch sehr widerstandsfähig.

Selendampf- und Vakuumbehandlung

Vorversuche hatten gezeigt, daß sich die elektrischen Eigenschaften der Platten durch Selenbeladung bzw. Selenentzug in weiten Grenzen ändern.

In ein Rohr aus Supremax- oder Felsenglas wurden die Versuchsplatten zusammen mit einem Stück Stangenselen eingeschmolzen. Das Rohr wird auf 10^{-5} mm Hg ausgepumpt und abgezogen. Wegen des Selens kann nur erwärmt und nicht ausgeheizt werden. Bei den Vakuumtemperungen blieb das Rohr mit den Versuchsplatten an die Pumpe angeschlossen. Das Vakuum wurde ständig überwacht und in Abständen von 2—3 Std. gemessen. Es betrug bei allen Temperungen 10^{-5} mm Hg.

Getempert wurde bei 500° im Platinofen. Selendampftemperungen dauerten je nach Dicke der Platte 20—30 Std., Vakuumtemperungen 10—15 Std. Quecksilberdämpfe waren mit fester Kohlensäure oder flüssiger Luft ausgefroren. Die Temperatur von 500° C war gewählt, weil bis zu 400° C auch bei tagelanger Temperung noch keine

1) Frey, Ztschr. f. Elektrochem. **36**. S. 511. 1930.

wesentliche Änderung der elektrischen Eigenschaften eintritt und bei 600° C die Platten vielfach rissig und spröde werden.

Über die Menge des aufgenommenen bzw. abgegebenen Selens können keine genauen Angaben gemacht werden. Eine Wägung war zwecklos, weil neben Selen auch ein Teil des Selenids sublimierte. Von chemischen Analysen haben wir abgesehen.

Meßanordnung und Meßverfahren

Meßanordnung und -verfahren sind bereits in früheren Mitteilungen[1]) beschrieben. Die Halterung für die Versuchsplatte war in Einzelheiten verbessert. Die PbSe-Platten, die möglichst genau rechtwinklig geschliffen waren, wurden auf einer Quarzplatte zwischen zwei Messingelektroden eingeklemmt. Der Widerstand wurde mit Rücksicht auf Übergangswiderstände stets mit Sonden in Kompensation gemessen. Die Hallelektroden bestanden aus zwei kleinen Messingstäbchen, an die kleine U-förmige Federn angelötet waren. Durch Halteschrauben wurden die Federn in der Mitte der Längsseiten gegen die Versuchsplatte gepreßt. Die Zuleitungen zu den Hauptelektroden, Sonden und Hallelektroden verliefen in Kapillaren, die hinten an die Quarzplatte angeschmolzen waren.

Ein Elektromagnet lieferte eine Feldstärke von 1800 Aw/cm bei einer Polfläche von 19,6 cm² und dem für das Dewargefäß erforderlichen Polabstand von 4 cm.

Eine geringe Spannungsdifferenz zwischen den Hallelektroden wurde kompensiert. Bei der Messung wurde das Magnetfeld mehrere Male umgepolt und außerdem streng darauf geachtet, daß die Ausschläge nach beiden Seiten symmetrisch zum Nullpunkt lagen. Bei vielen Proben wurde außerdem untersucht, ob Proportionalität zwischen den Ausschlägen und der Feldstärke und zwischen Hauptstrom und Hallspannung bestand. Der Hallkreis wurde nach jeder Messung auf Spannungsempfindlichkeit geeicht. Sie betrug etwa 3 μV/Skt.; die auftretenden Hallspannungen waren je nach Beschaffenheit und Dicke der Platten $5 \cdot 10^{-5}$ bis $5 \cdot 10^{-4}$ Volt.

Die Meßgenauigkeit des Widerstandes betrug aus geometrischen Gründen 5%. Die Hallkonstante konnte bis auf 1% genau angegeben werden.

Wir hatten weiterhin die Einheitlichkeit unserer Platten gelegentlich dadurch geprüft, daß wir sie nach einer Messung von beiden Seiten auf etwa die Hälfte ihrer ursprünglichen Dicke abgeschliffen haben; erneute Messung der Leitfähigkeit und der Hall-

1) O. Fritsch, a. a. O.; G. Bauer, a. a. O.

konstanten lieferte die früheren Werte innerhalb der angegebenen Fehlergrenzen.

Zur Messung der Temperaturabhängigkeit von Hallkonstante und Leitfähigkeit wurde die Quarzhalterung in ein einseitig geschlossenes Glasrohr gesteckt und dieses in flüssige Luft getaucht. Abkühlung und Wiedererwärmung ging langsam genug vor sich, um bequem Zwischenpunkte festzulegen. Die Temperatur wurde mit einem Kupfer–Konstantan–Thermoelement bestimmt, dessen Lötstelle sich unmittelbar vor der Plattenmitte befand. Das Eindringen von Feuchtigkeit und damit eine störende Eisbildung bei der Abkühlung wurde durch einen Verschluß aus Zellstoffwatte vermieden.

Tabelle 2

Übersicht über die untersuchten Bleiselenidproben unter Berücksichtigung ihrer vermutlichen chemischen Zusammensetzung

Nr.	Leitfähigkeit in $cm^{-1}\,Ohm^{-1}$	Hallkonstante in $cm^3/Amp.\,sec$	Beweglichkeit in $cm^2/Volt\,sec$	Thermospannung gegen Bi in $\mu V/Grad$	
1	30	+ 6,7	200	−312	angenäh. stöchiometr. Zusammensetzung
2	15	+ 9,7	150	−313	
3	10	+17,0	170	−327	
4	10	−28,3	280	+234	
11	120	+ 3,4	400	−275	
12	170	+ 2,9	480	−256	abnehmender Se-Überschuß ▲
13	120	+ 3,4	400	−281	
14	170	+ 2,8	470	−232	
15	65	+ 4,1	260	−255	
16	110	+ 2,5	270	−257	
17	70	+ 5,1	360	−307	
21	260	+ 1,3	340	−225	
22	460	+ 1,5	700	−246	
23	500	+ 1,2	580	−222	
24	1000	+ 0,3	270	−133	
25	730	+ 0,8	560	−202	
26	600	+ 0,9	550	−166	
27	540	+ 0,9	490	−187	
31	2300	+ 0,4	830	−155	
32	2300	+ 0,3	770	−155	
41	530	− 2,6	1370	+108	Pb-Überschuß
42	1000	− 0,3	320	+ 20	
43	1000	− 0,6	660	+ 15	
44	630	− 0,8	570	+ 27	
45	900	− 0,5	410	+ 35	
46	1000	− 0,7	670	+ 25	
47	800	− 0,6	470	+ 20	
48	900	− 0,6	540	+ 12	
49	830	− 1,0	800	+ 66	
50	1200	− 0,7	830	+ 55	

Zur Messung der Thermospannung diente eine ähnliche Anordnung, wie sie schon näher in einer früheren Mitteilung[1]) beschrieben worden ist. Die Platten wurden zwischen zwei Kupferblöcken eingeklemmt, von denen einer elektrisch heizbar war, während der andere durch ein Ölbad auf Zimmertemperatur gehalten wurde. An den beiden Blöcken war je eine Lötstelle eines Kupfer–Konstantan–Thermoelementes angebracht. Die Temperaturdifferenzen bzw. die Thermospannungen des Systems Kupfer–Halbleiter–Kupfer wurden mit einem Millivoltmeter gemessen.

Ergebnisse

Leitfähigkeit

Tab. 2 enthält die gesamten Ergebnisse von 30 Platten, die zu endgültigen Messungen verwendet wurden.

Die Leitfähigkeit des erhaltenen Bleiselenids schwankt zwischen 10 und 2300 $cm^{-1}\,\Omega^{-1}$. Der niedrigste Wert entspricht vermutlich der stöchiometrischen Zusammensetzung. Überschuß an Selen wie an Metall verbessern die Leitfähigkeit. Leitfähigkeitswerte in der Größenordnung 100 $cm^{-1}\,\Omega^{-1}$ von Versuchsplatten mit Bleiüberschuß fehlen, weil derartiges Material sich nicht bearbeiten ließ.

Es besteht kein Unterschied zwischen Proben, die in Vakuum und solchen, die im offenen Tiegel geschmolzen wurden. Die Platte 16 aus gefälltem Bleiselenid zeigt ebenfalls gleiche Eigenschaften. Die späteren Erörterungen gelten deswegen gemeinsam für alle Versuchsplatten.

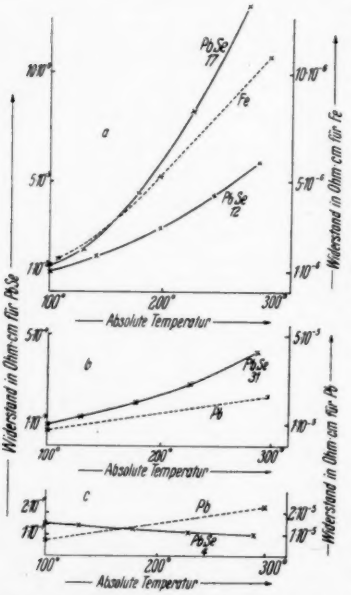


Abb. 1. Temperaturabhängigkeit des Widerstandes. Die eingetragenen Zahlen sind die Nummern der Platten

Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit

In Abb. 1 sind für 4 Proben die Widerstandstemperaturkurven eingezeichnet. Die Temperaturabhängigkeit ist durchweg für einen Halbleiter gering. In den meisten Fällen nimmt der Wider-

1) H. Schweickert, Ann. d. Phys. [5] **34**. S. 251. 1939.

stand sogar wie bei den Metallen mit steigender Temperatur zu; diese Zunahme ist in keinem Fall linear, bei hohem Selenüberschuß und bei den Proben mit Bleiüberschuß ist sie etwas größer als bei Blei. (Beispiel: Kurve *1b* für Platte 31.) Bei geringerem Selenüberschuß wird die Widerstandszunahme größer und erreicht Werte, wie sie etwa bei Eisen bekannt sind. Zum Vergleich ist in Abb. 1a die Temperaturabhängigkeit für Eisen[1]) eingetragen. Nur bei Proben mit den kleinsten Leitfähigkeitswerten nimmt der Widerstand mit steigender Temperatur ab wie bei den Halbleitern. Doch ist diese Abnahme sehr gering, und es hat keinen Sinn, die bekannte Beziehung

$$\sigma = a \cdot e^{-\frac{b}{kT}}$$

anzuwenden.

Die Leitfähigkeit folgt der Temperaturänderung ohne Verzögerung und ist reversibel. Eine irreversible Veränderung wie bei Kupferselenid[2]) wurde nie beobachtet.

Änderung der Leitfähigkeit durch Selen- oder Vakuumtemperung

Die Temperungen haben bei Platten verschiedener Herkunft unterschiedliches Ergebnis. Platten mit kleinem Selenüberschuß verbessern die Leitfähigkeit bei Temperung im Selendampf noch um

Tabelle 3

Einfluß von Selendampf- und Vakuumbehandlung für sechs verschiedene Proben

Nr.	Leitfähigkeit in $cm^{-1}\,\Omega^{-1}$		Hallkonstante in cm^3/Amp. sec		Thermospannung gegen Bi in μV/Grad		Behandlung	
	vorher	nachher	vorher	nachher	vorher	nachher		
1	30	10	+ 6,7	−26,2	−312	+241	10 Std.	Im
12	170	40	+ 2,9	− 8,3	−256	+119	12 Std.	Vak.
25	730	110	+ 0,8	− 4,5	−202	+110	12 Std.	get.
1	10	150	−26,2	+ 2,1	+241	−235	30 Std.	Im
12	40	140	− 8,3	+ 3,0	+119	−245	30 Std.	Se-D.
25	110	700	− 4,5	+ 0,7	+110	−190	20 Std.	get.
42	1000	24	− 0,3	+ 6,1	+ 20	−270	21 Std.	Im
43	1000	160	− 0,6	+ 1,8	+ 15	−240	24 Std.	Se-D.
47	810	110	− 0,6	+ 2,4	+ 20	−252	24 Std.	get.
42	24	140	+ 6,1	− 1,9	−270	+ 65	10 Std.	Im
43	160	270	+ 1,8	− 1,8	−240	+ 78	12 Std.	Vak.
47	110	160	+ 2,4	− 2,1	−252	+ 80	12 Std.	get.

1) E. Grüneisen, Handb. d. Exp.-Phys. Bd. 13. S. 13.
2) H. Reinhold u. H. Möhring, Ztschr. phys. Chem. (B) 38. S. 221. 1937.

INSTITUT COLLEGE LIBRARY

etwa eine Zehnerpotenz. Platten mit hohem Bleiüberschuß verschlechtern ihre Leitfähigkeit bei gleicher Behandlung um etwa den gleichen Betrag. Vakuumtemperung bewirkt das Gegenteil, d. h. Proben mit Selenüberschuß werden weniger gut leitend, Proben mit anfänglichem Bleiüberschuß werden noch etwas besser leitend. Tab. 3 zeigt Temperungsergebnisse an je drei Platten mit anfänglichem Selen- bzw. Bleiüberschuß.

Hallkonstante

In Tab. 2 sind neben der Leitfähigkeit die gemessenen Hallkonstanten in $cm^3/Amp.sec$ eingetragen. Größe und Vorzeichen ist sehr wesentlich von der Herstellungsart abhängig. Proben mit angenähert stöchiometrischer Zusammensetzung oder mit einem Überschuß der elektronegativen Komponente haben positives (anomales) Vorzeichen. Die absolute Größe nimmt ab mit zunehmendem Selenüberschuß. Proben mit Metallüberschuß haben negativen (normalen) Halleffekt. Der absolute Betrag sinkt ebenfalls mit zunehmendem Metallüberschuß.

Selendampf- bzw. Vakuumtemperung beeinflußt die Hallkonstante nach Größe und Vorzeichen. Platten mit normalem Halleffekt erhalten durch Selendampftemperung anomalen. Eine folgende Vakuumbehandlung bewirkt wieder einen normalen Halleffekt. Diese Vorzeichenumkehr kann beliebig oft wiederholt werden.

Die Hallkonstante ist praktisch temperaturunabhängig. In Ausnahmefällen nimmt sie bei Abkühlung auf $-183°$ C ohne Rücksicht auf das Vorzeichen um etwa 10—15% zu; bei zwei Proben mit angenähert stöchiometrischer Zusammensetzung und hoher negativer Hallkonstante verdoppelte sie sich sogar. Bei diesen beiden Proben sank auch die Leitfähigkeit bei Abkühlung.

Thermospannung

Aus den erhaltenen Spannungswerten wurde die Thermokraft gegen Wismut in μVolt/Grad errechnet. Die so erhaltenen Werte sind in Tab. 2 auf Spalte 5 eingetragen. Sie zeigen ein ähnliches Verhalten wie die Hallkonstanten. Die Thermokraft hängt nach Vorzeichen und Größe von der Herstellungsart der Proben ab. Überschuß an Selen gibt in der thermoelektrischen Spannungsreihe einen negativen Wert, dessen absoluter Betrag mit zunehmendem Selengehalt sinkt. Überschuß des Metalls kehrt das Vorzeichen der Thermospannung um, d. h. der Wert in der thermoelektrischen Spannungsreihe wird positiv. Zunahme des Bleiüberschusses bewirkt ein Absinken des absoluten Betrages.

Durch Temperungen wird das Vorzeichen der Thermospannung umgekehrt beeinflußt wie bei der Hallkonstante. Selendampftemperungen bringen im Endergebnis stets einen negativen Wert, Vakuumtemperungen immer einen positiven. Diese Umkehr ist beliebig oft zu wiederholen.

An vier verschiedenen Proben (zwei Proben mit Selenüberschuß Nr. 2 und 32 und an zwei mit Bleiüberschuß Nr. 50 und 4) wurde die Temperaturabhängigkeit der Thermospannung zwischen 10° und 20° C gemessen. Unabhängig von der Größe der Thermospannung ist der Wert völlig temperaturunabhängig.

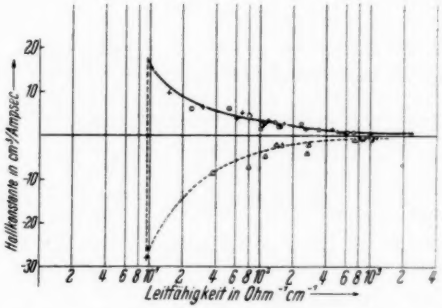


Abb. 2. Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Hallkonstante.
+ Unbehandelte Proben
○ im Selendampf getemperte Proben
△ im Vakuum getemperte Proben

In Abb. 2 wird versucht, einen Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Hallkonstante aufzufinden. Es sind die Meßergebnisse an unbehandelten und die Meßergebnisse an selengetemperten bzw. vakuumgetemperten Proben eingetragen. Der Verlauf der Kurve im positiven Teil ist gut festgelegt. Im negativen Teil streuen die Werte so stark, daß nur sehr roh eine Kurve durch die vorhandenen Meßpunkte gezogen werden kann. Die große Streuung hängt vielleicht damit zusammen, daß geringer Bleiüberschuß nicht möglich ist. Die Hallkonstanten beider Vorzeichen erreichen nach der Seite schlechter Leitfähigkeiten einen Höchstwert. Bei angenähert stöchiometrischer Zusammensetzung springt die Hallkonstante von einem großen normalen zu einem großen anomalen Wert.

Bemerkenswert erscheint, daß $R\sigma$ bei beiden Vorzeichen der Hallkonstante mit wachsendem σ von 330 bzw. 500 auf 1000 cm²/Volt sec ansteigt.

Der Zusammenhang von Leitfähigkeit und Thermospannung wird in Abb. 3 dargestellt. Es gilt hier das gleiche, was bereits für die Hallkonstante erwähnt wurde. In Abb. 4 ist schließlich noch

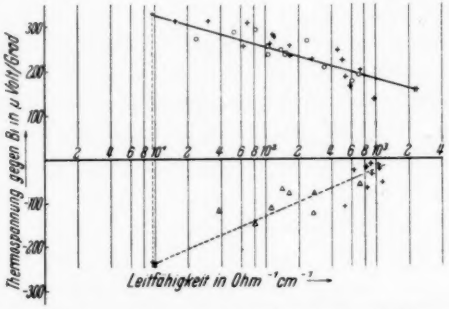


Abb. 3. Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Thermospannung[1]).

+ Unbehandelte Proben
○ im Selendampf getemperte Proben
△ im Vakuum getemperte Proben

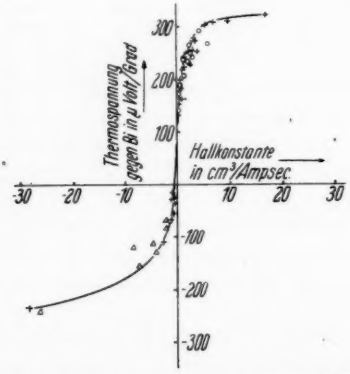


Abb. 4. Zusammenhang zwischen Hallkonstante und Thermospannung[1]).

+ Unbehandelte Proben
○ im Selendampf getemperte Proben
△ im Vakuum getemperte Proben

der Zusammenhang von Hallkonstante und Thermospannung aufgezeichnet.

---

1) Berichtigung: Das Vorzeichen der Thermospannung ist umgekehrt zu lesen.

Schlußbemerkung

Wir haben versucht, die oben beschriebenen verwickelten Beobachtungen zu deuten und im Hinblick auf unsere derzeitigen Kenntnisse über den Leitungsmechanismus zu erklären. Die Fehlordnungstheorie von C. Wagner und W. Schottky[1]) und die von C. Wagner[2]) erweiterte Theorie der geordneten Mischphasen ist an die Bedingung idealverdünnter Lösungen geknüpft, d. h. es wird ein geringer Fehlordnungsgrad und eine damit verbundene kleine Leitfähigkeit vorausgesetzt. Es ist daher nicht ohne weiteres die Anwendbarkeit dieser Theorie zu erwarten. Dennoch lassen sich mit ihr unsere Beobachtungen vielleicht deuten.

Bleiselenidproben mit Selenüberschuß haben stets positive Hallkonstante. Die Leitfähigkeit wird durch Einbau der elektronegativen Komponente verbessert. Aus dem Vorzeichen und der Änderung der Thermokraft mit der Zusammensetzung ergibt sich, daß bei Proben mit Selenüberschuß die Elektronen an der heißen Lötstelle vom schlechtleitenden zum gutleitenden Halbleiterstück fließen. Die Beobachtungen lassen nach der Theorie von Wagner auf Elektronendefektleitung schließen. Bei Proben mit Bleiüberschuß ist das Vorzeichen der Hallkonstante negativ. Einbau der elektronegativen Komponente ergibt Verringerung der Leitfähigkeit. Aus den Messungen der Thermokraft folgt, daß die Elektronen an der heißen Lötstelle vom gutleitenden zum schlechtleitenden Halbleiterstück fließen. Diese Beobachtungstatsachen sind nach C. Wagner das Kennzeichen für Elektronen-Überschußleitung. Bleiselenid ist demnach ein Halbleiter, bei dem sowohl Elektronen-Defektleitung als auch Elektronen-Überschußleitung bestehen kann. Durch entsprechende Vorbehandlung lassen sich die Anteile beider in der einen oder anderen Richtung in weiten Grenzen verschieben. Ähnliche Beobachtungen scheinen an Thalliumsulfid[3]) gemacht zu sein.

Im Gegensatz zu den Seleniden, Telluriden und Sulfiden des Kupfers[4]) und des Silbers[5]) liegen beim Bleiselenid die Verhältnisse einfacher. Während bei den erstgenannten Stoffen mindestens zwei Modifikationen existieren, scheint Bleiselenid in dem von uns untersuchten Temperaturbereich nur in einer Modifikation vorzukommen.

1) C. Wagner u. W. Schottky, Ztschr. phys. Chem. (B) **11**. S. 163. 1931.
2) C. Wagner, Ztschr. phys. Chem. (B) **22**. S. 181 u. 195. 1933.
3) Hochberg u. Sominski, Phys. Zeitschr. d. Sowjetunion **13**. S. 198. 1938.
4) H. Reinhold u. H. Möhring, a. a. O.
5) C. Tubandt, H. Reinhold u. Anne-Liese Neumann, Ztschr. Elektrochem. **39**. S. 228. 1933.

Die hohe Leitfähigkeit des Bleiselenids trotz annähernd stöchiometrischer Zusammensetzung läßt den Schluß zu, daß in der Besetzung der Gitterpunkte im Kristall ein hoher Grad von Fehlordnung herrschen muß. Ein Zustand völliger Ordnung im Gitter wird auch bei tiefen Temperaturen nicht erreicht. Proben mit schlechter Leitfähigkeit und negativer Hallkonstante zeigen zwar die Temperaturabhängigkeit wie Halbleiter, doch ist die Abnahme der Leitfähigkeit bei Abkühlung auf die Temperatur der flüssigen Luft nur gering (Faktor etwa 1,5—2). Die Hallkonstante, die bei anderen Proben temperaturunabhängig ist, steigt bei diesen Proben auf etwa den doppelten Wert, von -26 auf -50 cm³/Amp. sec; diese Zunahme ist gleichbedeutend mit einer Abnahme der an der Leitung beteiligten Elektronen.

Erstaunlich ist die große Temperaturabhängigkeit des Widerstandes bei Proben mit Selenüberschuß. Außerdem sind auch die Produkte aus Hallkonstante und Leitfähigkeit, als „Beweglichkeit" gedeutet, unverständlich hoch. Wir wagen nicht, dafür eine entsprechende Deutung zu geben. Weitere Messungen, die zur Zeit noch durchgeführt werden, sollen zur Klärung dieser Fragen beitragen.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für ständige Hilfe und wertvolle Beratung während ihrer Durchführung bin ich Herrn Prof. Dr. B. Gudden größten Dank schuldig.

Den Vereinigten Sauerstoff-Werken G. m. b. H., Nürnberg danken wir für die kostenlose Überlassung der benötigten flüssigen Luft, der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Bereitstellung verschiedener Apparate.

Erlangen, Physikalisches Institut der Universität, Februar 1939.

(Eingegangen 9. Juni 1940)

Verantwortlich: für die Redaktion: Prof. Dr. E. Grüneisen, Marburg/L.; für Anzeigen Bernhard v. Ammon, Leipzig. - Anzeigenannahme: Leipzig C 1, Salomonstr. 18 B, Tel. 70861. - Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig. - Druck: Metzger & Wittig, Leipzig C 1. - Zur Zeit gilt Preisliste 4. - Printed in Germany.